Conceptos de equilibrio en teoría de juegos cooperativa

Francisco Gutierrez Sanín
Camilo Enrique Argoty

Índice general

Capítulo 1

Primera sesión: La Pepa y sus refinamientos

1.1. Conceptos básicos

1.1.1 Definición. Un *juego cooperativo*, es un par ordenado (N, v) donde N es un conjunto de jugadores y v es una función

$$v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}.$$

Un conjunto $S \in \mathcal{P}(N)$ es llamado *coalición*.

De aquí en adelante, la letra n denotará el tamaño de N ($n = \#(N)$).

1.1.2 Definición. Un juego cooperativo (N, v) se dice:

1. *superaditivo* si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

2. *aditivo* o *inescencial* si $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$

3. *subaditivo* si $v(S \cup T) = v(S) \leq v(T)$

4. *débilmente superaditivo* si $v(S \cup \{i\}) \geq v(S) + v(\{i\})$

5. de *suma constante* si $v(S) + v(N - S) = v(N)$

6. *convexo* si $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$

7. *zero-normalizado* si $v(i) = 0$ para todo $i \in N$

8. *monótona* si $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$

para todo $S, T \in \mathcal{P}(N)$ con $S \cap T \neq \emptyset$.

Nótese que para un juego cooperativo (N, v) se tiene la siguiente implicación:

CONVEXIDAD $\Rightarrow$ SUPERADITIVIDAD $\Rightarrow$ SUPERADITIVIDAD DEBIL

1.1.3 Definición. Dos juegos (N, v) y (M, w) son *estratégicamente equivalentes* si existe $\alpha > 0$ y $\beta : N \to \mathbb{R}$ tal que para toda coalición $S \in N$, $w(S) = \alpha v(s) + \beta(s)$. Igualmente, v se dice *simétrica* si $S_N = S_{N/v}$ y un juego (N, v) se dice *simétrico* si y solo si

$$|S| = |T| \Longrightarrow v(S) = v(T)$$

1.2. La pepa

La *pepa* es el conjunto de asignaciones tal que la suma en cada asignación sobre cada conjunto de asignaciones, sobre cada conjunto de jugadores es mayor que el valor que le da al juego como coalición. La pepa es una solución del juego cooperativo

$$C(N, \nu) = \left\{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \sum_{i \in N} x_i = \nu(N); \ \sum_{i \in S} x_i \geq \nu(S), \ \forall S \subseteq N\right\}$$

La pepa de un juego puede ser vacía. Los juegos de pepa no vacía se llaman balanceados. Si la pepa es no vacía, la pepa no contiene necesariamente un único vector. Un juego que no tenga una asignación que cumpla con las condiciones para pertenecer a la pepa, se llama un *juego de pepa vacía.*

1.2.1. Teorema de Bondareva shapley

1.2.1 Definición. Una aplicación $\lambda : \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R}_+$ se dice *balanceada*, si

$$\sum_{\mathcal{P}(N)\setminus\{\emptyset\}} \lambda(S)\chi_S = \chi_N$$

1.2.2 Definición. Una colección B de coaliciones, se dice *balanceada* si existe una aplicación balanceada λ tal que

$$B = \{S \in \mathcal{P}(N) : \lambda(S) > 0\}$$

1.2.3 Definición. Un juego se dice *balanceado*, si para cada aplicación λ balanceada, se tiene

$$\sum_{S\in\mathcal{P}(N)\setminus\{\emptyset\}} \lambda(S)v(S) \leq v(N)$$

1.2.4 Teorema (Teorema de Bondareva-Shapley)**.** *Un juego cooperativo* (N, v) *tiene pepa no vacía si y sólo si*(N, v) *es un juego balanceado.*

Demostración. Si $C(v) \neq \emptyset$ entonces

$$v(N) = \text{mín} \sum_{i\in N} x_i$$

sujeto a:

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)\}$$

para todo $S \in \mathcal{P}(N) \setminus \emptyset$

Aplicando el principio de dualidad en programación lineal, se obtiene que dicho problema tiene solución si y solo si el siguiente problema lo tiene

$$\text{máx} \sum_{S\in\mathcal{P}(N)\setminus\{\emptyset\}} \lambda(S)v(S)$$

sujeto a:

$$\sum_{i\in S} \lambda(S)\chi_S = \chi_N$$

Pero esto es equivalente a decir que el juego es balanceado.

$\square$

1.3. Refinamientos de la Pepa

1.3.1. ϵ-pepa y pepa mínima

1.3.1 Definición. Sea (N, v) un juego cooperativo con una estructura de coaliciones $\mathbb{R}$, y sea $\epsilon > 0$. Se define la *ϵ-pepa* el siguiente conjunto:

$$C_\epsilon(N, \nu) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i \in N} x_i = \nu(N); \ \sum_{i \in S} x_i \geq \nu(S) \setminus \epsilon, \ \forall S \subseteq N\}$$

1.3.2 Definición. Sea (N, v) un juego cooperativo con una estructura de coaliciones $\mathbb{R}$. La *pepa mínima* es la intersecćon de las ϵ-pepas no vacías donde $\epsilon > 0$.

1.4. Ejemplos

1.4.1. Ejemplo de un Juego Clasico Balanceado.

Consideremos un juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y las siguientes asignaciones:
$v(S) = 0$ si $|S| \leq 1$, $v(S) = 60$ si $S = \{1, 2\}$; $v(S) = 48$ si $S = \{1, 3\}$; $v(S) = 30$ si $S = \{2, 3\}$;$v(S) = 72$si $S = N$

para confirmar que el juego es balaceado, sea $\lambda : \mathcal{P} - \{\emptyset\} \to [0, 1]$ una aplicacin balanceada. Como $v(i) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ y $v(i, j) > 0$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. Como λ es balanceada sabemos que las siguintes ecuaciones se cumplen:

$$\lambda(1, 2) + \lambda(1, 3) + \lambda(1, 2, 3) = 1$$

$$\lambda(1, 2) + \lambda(2, 3) + \lambda(1, 2, 3) = 1$$

$$\lambda(1, 3) + \lambda(2, 3) + \lambda(1, 2, 3) = 1$$

as, tenemos que $\lambda(1, 2) = \lambda(1, 3) = \lambda(2, 3) = \frac{1-\lambda(1,2,3)}{2}$, luego, λ puede ser idenificada como $\lambda(1, 2, 3) \in [0, 1]$, as:

$$\sum_{S \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}} \lambda(S) v(S) =$$

$$\frac{1 - \lambda(1, 2, 3)}{2} 60 + \frac{1 - \lambda(1, 2, 3)}{2} 48 + \frac{1 - \lambda(1, 2, 3)}{2} 30$$

$$+\lambda(1,2,3)72 = 69 + 3\lambda(1,2,3) \leq 72 = v(N)$$

Por lo tanto el juego es balanceado y as tiene Pepa no vacia. Veamos entonces cuáles son los elementos de la Pepa.
Un elemento x de la Pepa debe satisfacer las siguientes desigualdades:

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0,$$

$$x_1 + x_2 \geq 60, \quad x_1 + x_3 \geq 48, \quad x_2 + x_3 \geq 30,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 72$$

Entonces, por ejemplo, la asignación $(x_1, x_2, x_3) = (40, 22, 10)$ est en la Pepa del juego (N, v). Es claro que existen ms asignaciones dentro de la Pepa, de hecho, la Pepa es la envolvente convexa de las tres asignaciones $(42, 24, 6)$, $(42, 18, 12)$ y $(36, 24, 12)$.

1.4.2. El juego de Los Guantes (The gloves game)

Sea $N = \{1, \ldots, n\}$, tal que N está dividido en dos subconjuntos disjuntos I y D. Cada jugador de I posee un guante izquierdo y cada jugador de D posee un guante derecho. Se le da un valor de la siguiente manera: si existe una pareja con un guante derecho y un guante izquierdo se les paga 1. En otro caso el valor dado será O.
Podemos modelar esta situación como un juego (N, v) donde para cada $S \in \mathcal{P}(N)$ se tiene que $v(S) := \text{mín}\{|I \cap S|, |D \cap S|\}$

Analicemos este juego tomando $n = 3$ donde $\{1, 2\} = I$ y $\{3\} = D$. Veamos si el juego tiene Pepa y en caso de tenerla mostremos cuál es.

Notemos al vector (a, b, c) como el vector de asignación de pagos para cada jugador donde a es la paga del jugador 1, b es la paga del jugador 2 y c es el pago del jugador 3.

Para que (a, b, c) esté en la Pepa, debe cumplir las siguientes desigualdades: $a + b \geq v(a, b) = 0$; $a + c \geq v(a, c) = 1$; $c + b \geq v(c, b) = 1$; $a \geq v(a) = 0$; $b \geq v(b) = 0$; $c \geq v(c) = 0$. Además, tenemos $a + b + c = 1 = v(N)$.

Luego, resolviendo las ecuaciones
$a + c \geq 1$; $a + b + c \geq 1 + b$; $1 \geq 1 + b$. Entonces b=0.

$b + c \geq 1$; $a + b + c \geq 1 + a$; $1 \geq 1 + a$. Entonces a=0.

Por lo tanto, $c = 1$. Así se tiene que la pepa es no vacia, porque la asignación $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ esta en ella y también es la única que se encuentra alli.
Notese que el juego posee ϵ-Pepa siempre y cuando tomemos $\epsilon = 1$

1.4.3. El Juego del Cofre

El juego consiste en lograr abrir un cofre que necesita de dos personas para poder abrirlo. Sea $N = \{1, 2, 3\}$, entonces se da una valuación como sigue:

$$v(S) = 1 \quad s \in \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$
$$v(S) = 0 \text{ en otro caso.}$$

Nótese que éste juego es Superaditivo y Montono. el conjunto de las pagos eficientes para este juego es

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

y el conjunto de todos los pagos que son individualmente racionales y eficientes es el conjunto de asignacines

$$I(N, v) =$$

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1; x_i \geq 0 \forall i \in \{1, 2, 3\}\}$$

Por ejemplo, la asignación $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ es un pago que es eficiente, pero no es individualmente racional.
El juego de el cofre no es balanceado, luego, tiene pepa vacía, que se demuestra con de la siguiente manera.

$C(v) = x \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i \in N} x_i = v(N) = 1, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

Se tiene: $a, b, c \geq 0$; $a + b \geq 1$; $a + c >= 1$; $c + b >= 1$

Adems, tenemos $a + b + c = 1 = v(N)$, luego, resolviendo las ecuaciones

$a + c >= 1$, $a + b + c >= 1 + b$, $1 >= 1 + b$. Entonces, $b = 0$ y $(a \geq 1)$ o $(c \geq 1)$

$b + c \geq 1$, $a + b + c \geq 1 + a$, $1 \geq 1 + a$. Entonces $a = 0$.

$a + b + c \geq 1 + c$, $1 \geq 1 + c$. Entonces $c = 0$, pero $c \geq 1$ por tanto se llega a una contradicción, así,tiene pepa vacía.

Capítulo 2

Segunda sesión: Otros conceptos de equilibrio

2.1. Conjunto de negociación

2.1.1 Definición. Una *estructura de coaliciones* $\mathcal{R}$ para un juego cooperativo (N, v) es una partición del conjunto de jugadores N.

2.1.2 Definición. Dado un juego cooperativo (N, v) y una estructura de coaliciones $\mathcal{R}$ sobre N, se define el conjunto de *imputaciones* de $(N, v, \mathcal{R})$ como el conjunto:

$$I(N, v, \mathcal{R}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(S) \leq v(S) \text{ para todo } S \in \mathcal{R} \text{ y } x_i \geq v(\{i\}) \text{ para todo } i \in N\}$$

2.1.3 Definición. Dados $k, l \in N$ distintos sea T_{kl} el conjunto:

$$T_{kl} = \{S \subseteq N \setminus \{l\} \mid k \in S\}$$

2.1.4 Definición. Sean $k, l \in N$ diferentes. Una *objeción* de k contra l en $x \in \mathbb{R}^n$ es un par (P, y) tal que:

1. $P \in T_{kl}$
2. $y \in \mathbb{R}^{\#(P)}$
3. $y_i \geq x_i$ para todo $i \in P$
4. $y(P) \leq v(P)$

2.1.5 Definición. Sean k, l distintos y (P, y) una objeción de k contra l en x. Una *contraobjeción* de l contra k es un par (Q, z) tal que:

1. (Q, z) es una objeción de l contra k
2. $z_j \geq y_j$ para todo $j \in P \cap Q$.

Una imputación $x \in I(N, V, \mathcal{R})$ se dice *estable* si toda objeción en x tiene una contraobjeción.

2.1.6 Definición. Dado un juego cooperativo (N, v) con una estructura de coaliciones $\mathcal{R}$, el *conjunto de negociación* de $(N, v, \mathcal{R})$ es el conjunto:

$$\mathcal{M}(N, v, \mathcal{R}) = \{x \in I(N, v, \mathcal{R}) \mid x \text{ es estable } \}$$

2.2. Prekernel y kernel

2.2.1 Definición. Sean $S \subseteq N$ y $x \in \mathbb{R}^N$. El *exceso* de S en x es el valor:

$$e(S, x, v) = v(S) - x(S)$$

2.2.2 Definición. Sean $k, l \in N$ diferentes y $x \in \mathbb{R}^N$. La *máxima ganancia* de k sobre l en x es el valor:

$$s^x_{kl} = \text{máx}\{e(S, v, x) \mid S \in T_{kl}\}$$

Si $k, l \in R \in \mathcal{R}$ y $s_{kl} > s_{lk}$, se dice que el jugador k *sobrepasa* al jugador l y esto se denota $k \succ_x l$.

2.2.3 Definición. Dado un juego (N, v) con una estructura de coaliciones $\mathcal{R}$, se define el *prekernel* como el conjunto:

$$\mathcal{PK}(N, v, \mathcal{R}) = \{x \in X(N, v, \mathcal{R}) \mid s^x_{kl} = s^x_{lk} \text{ y } k \neq l\}$$

2.2.4 Definición. Sea (N, v) un juego con una estructura de coaliciones $\mathcal{R}$, se define el *kernel* como el conjunto:

$$\mathcal{K}(N, v, \mathcal{R}) = \{x \in I(N, v, \mathcal{R}) \mid \text{para todos } k \neq l \text{ si } x_k > v(\{i\}) \text{ entonces } s^x_{kl} \geq s^x_{lk}\}$$

2.3. Prenucleolo y nucleolo

2.3.1 Definición. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $H = \{h_i\}_{i \in D}$ un conjunto de funciones $h_i : X \to \mathbb{R}$. Sea $d = \#(D)$. Dado $k = 1 \cdots d$, se definen las funciones $\theta_k : X \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$\theta_k(x) = \max_{T \subseteq D, \#(T)=k} \min_{i \in T} h_i(x)$$

donde $x \in X$.

Denotamos $\leq_{lex}$ al orden lexicográico en $\mathbb{R}^d$.

2.3.2 Definición. Sea (N, v) un juego cooperativo con una estructura de relaciones $\mathcal{R}$ y $H = \{h_i\}_{i \in D}$ un conjunto de funciones de valor real definidas en X. El *nuceolo* H con respecto a X se define como el conjunto:

$$\mathcal{N}(H, X) = \{x \in X \mid \theta(y) \geq_{lex} \theta(x) \forall y \in X\}$$

2.3.3 Definición. El caso particular en el que $X = X^*(N, v\mathcal{R})$ y $H = \{e(S, \cdot, v) \mid S \in \mathcal{P}(N)\}$, el nucleolo de H con respecto X se denomina el *prenucleolo* de $(N, v, \mathcal{R})$.

2.3.4 Definición. El caso particular en el que $X = I(N, v\mathcal{R})$ y $H = \{e(S, \cdot, v) \mid S \in \mathcal{P}(N)\}$, el nucleolo de H con respecto X se denomina el *nucleolo* de $(N, v, \mathcal{R})$.

2.4. El valor de Shapley

2.4.1. Propiedades deseables de una solución

Sea $2^{\mathcal{P}(N)}$ el conjunto funciones de valor real sobre el conjunto de coaliciones de N jugadores. Una función $\phi : 2^{\mathcal{P}(N)} \to \mathbb{R}^n$ satisface

- **Racionalidad Individual si** $\phi_i(v) \geq v(\{i\})$
- **Eficiencia si** $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) = v(N)$
- **Propiedad del Jugador Inútil si** $i \in N$ **es un jugador tal que** $v(X \cup \{i\}) = v(S)$ **para todo** $S \subseteq N$**, entonces** $\phi_i(v) = 0$
- **Aditividad si** $\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w)$
- **Simetría si dados dos jugadores** i, j **tales que** $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ **para todo** $S \subseteq N$**, entonces** $\phi_i(v) = \phi_j(v)$**.**

2.4.2. Aporte Marginal

2.4.1 Definición. Para todo $i \in N$ y todo $S \in \mathcal{P}(N)$, con $i \in S$, la *contribución marginal* del jugador i en la coalición S se define como la ganancia adicional que aporta el jugador i al entrar a la coalición S.

$$M_i(S, v) := v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

2.4.3. El valor de Shapley

El valor de Shapley es la paga promedio que recibe un jugador, o, el promedio de los valores marginales m de un juego v. Desde otro punto de vista es el valor mínimo por el que un jugador entra a una coalición. $\phi(v) = \sum_{\sigma \in \pi(N)} m^{\sigma}(v)$ o de otra forma

$$\phi_i(v) =$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{S(N)-\{i\}} (|S|!(n - |S| - 1)!)(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Supongamos que en una empresa existe un propietario P que no trabaja, pero que provee de un aporte capital crucial para su funcionamiento. En otras palabras, sin él no se pueden obtener ganancias.

Cada trabajador $W_1, W_2, \ldots, W_k$ contribuye en un monto r del total de la ganancia. Entonces $N = \{P, W_1, \ldots, W_k\}$.

Por tanto $v(S) = 0$ si P no está en la coalición S. $v(S) = mr$ si S contiene m trabajadores y al propietario. La idea es ver que el valor de Shapley para el propietario es $k * r/2$ y $r/2$ para cada trabajador.

El valor de Shapley es el vector único que satisface aditividad, anonimato, eficiencia y la propiedad del jugador inutil. Mostremos esta afirmación:
(*Aditividad*) se sigue directamente del hecho que $m^{\sigma}(v+w) = m^{\sigma}(v) + m^{\sigma}(w)$.
(*Eficiencia*) Notese que Φ es una combinación convexa de m^{σ} y $\sum_{i \in N} m_i^{\sigma}(v) = v(N)$ para cada $\sigma \in \pi(N)$
(*Propiedad del jugador inutil*) Notese que $\frac{1}{n} \sum_{S: i \notin S} (|S|!(n - |S| - 1)!) = 1$
(*Anonimato*) Veamos en dos partes esta propiedad.

- veamos que $\rho * (m^{\sigma}(v)) = m^{\rho\sigma}(v^{\rho})$

$$(m^{\rho\sigma}(v^{\rho}))_{\rho\sigma(i)} =$$

$$v^\rho(\rho\sigma(1),\dots,\rho\sigma(i)) - v^\rho(\rho\sigma(1),\dots,\rho\sigma(i-1))$$
$$= v(\sigma(1),\dots,\sigma(i)) - v(\sigma(1),\dots,\sigma(i-1))$$
$$= (m^\sigma(v))_{\sigma(i)} = \rho * (m^\sigma(v))_{\rho\sigma(i)}$$

- Sea $v \in J^N$ y $\rho \in \pi(N)$, usando la parte anterior,$\rho \to \rho\sigma$ es una sobreyección en $\pi(N)$ y la linealidad de $\rho*$

$$\Phi(v^\rho) = \frac{1}{n!}\sum m^{\rho\sigma}(v^\rho) = \frac{1}{n!}\sum \rho * (m^\sigma(v)$$
$$= \rho * \big(\frac{1}{n!}\sum m^\sigma(v)\big) = \rho * (\Phi(v))$$

2.4.4. Ejemplos

El juego de los guantes

El valor de Shapley está dado por

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{N!}\sum_R (v(P_i^R \cup \{i\}) - v(P_i^R))$$

Donde R es un ordenamiento de jugadores y P_i^R es el conjunto de jugadores en N que preceden a i en el orden R.

$N = \{1, 2, 3\}$

Analicemos el jugador 1 como pibote.

R	valor marginal
1, 2, 3	$v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
1, 3, 2	$v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
2, 1, 3	$v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = 0 - 0 = 0$.
2, 3, 1	$v(\{2,3,1\}) - v(\{2,3\}) = 1 - 1 = 0$.
3, 2, 1	$v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) = 1 - 1 = 0$.
3, 1, 2	$v(\{1,3\}) - v(\{3\}) = 1 - 0 = 1$.

Analicemos el jugador 2 como pibote.

R	valor marginal
1, 2, 3	$v(\{1,2\}) - v(\{a\}) = 0 - 0 = 0$.
1, 3, 2	$v(\{1,2,3\}) - v(\{a,c\}) = 1 - 1 = 0$.
2, 1, 3	$v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
2, 3, 1	$v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
3, 2, 1	$v(\{2,3\}) - v(\{3\}) = 1 - 0 = 1$.
3, 1, 2	$v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\}) = 1 - 1 = 0$.

.

Analicemos el jugador 3 como pibote.

R	valor marginal
1, 2, 3	$v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}) = 1 - 0 = 1$.
1, 3, 2	$v(\{1,3\}) - v(\{1\}) = 1 - 0 = 1$.
2, 1, 3	$v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}) = 1 - 0 = 1$.
2, 3, 1	$v(\{2,3\}) - v(\{2\}) = 1 - 0 = 1$.
3, 2, 1	$v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
3, 1, 2	$v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.

Así tenemos que

$$\Phi_1(v) = 1(1/6) = 1/6$$

$$\Phi_2(v) = \Phi_1(v) = 1/6$$

$$\Phi_3(v) = 4/6.$$

El juego del cofre

El valor de Shapley est dado por

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{N!} \sum_R (v(P_i^R \cup \{i\}) - v(P_i^R))$$

Donde R es un ordenamiento de jugadores y P_i^R es el conjunto de jugadores en N que preceden a i en el orden R.

$$N = \{1,2,3\}$$

analicemos el jugador 1 como pibote.

R	valor marginal
1, 2, 3	$v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
1, 3, 2	$v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
2, 1, 3	$v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = 1 - 0 = 1$.
2, 3, 1	$v(\{2,3,1\}) - v(\{2,3\}) = 1 - 1 = 0$.
3, 2, 1	$v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) = 1 - 1 = 0$.
3, 1, 2	$v(\{1,3\}) - v(\{3\}) = 1 - 0 = 1$.

.

analicemos el jugador 2 como pibote.

R	valor marginal
1, 2, 3	$v(\{2,1\}) - v(\{a\}) = 1 - 0 = 1$.
1, 3, 2	$v(\{1,2,3\}) - v(\{a,c\}) = 1 - 1 = 0$.
2, 1, 3	$v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
2, 3, 1	$v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
3, 2, 1	$v(\{2,3\}) - v(\{3\}) = 1 - 0 = 1$.
3, 1, 2	$v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\}) = 1 - 1 = 0$.

analicemos el jugador 3 como pibote.

R	valor marginal
1, 2, 3	$v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}) = 1 - 1 = 0$.
1, 3, 2	$v(\{1,3\}) - v(\{1\}) = 1 - 0 = 1$.
2, 1, 3	$v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}) = 1 - 1 = 0$.
2, 3, 1	$v(\{2,3\}) - v(\{2\}) = 1 - 0 = 1$.
3, 2, 1	$v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
3, 1, 2	$v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.

Bibliografía

[1] KUHN H. (Ed) (1997): *Clasics in game theory*. Princeton University Press.

[2] PELEG B. (1984): *Game theoretic analysis in voting comitees*. Cambridge University Press.

[3] PELEG, B. y SUDHOLTER, P. (2003): *Introduction to the Theory of Cooperative Games*. Kluwer Academic Publications.

[4] RODICA, B. DINKO, D. y STEF, T.(2005): *Models in Cooperative Game Theory*, in Lecturesnotes in Economics and Mathematicals Systems, 556. Springer.

[5] SLIKKER, M. y VAN DEN NOUWELAND A. (2001): *Social and Economic Networks in Cooperative Game Theory*. Kluwer Academic Publications.