



UNIVERSIDAD
SERGIO ARBOLEDA

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

Conceptos de equilibrio en teoría de juegos cooperativa

Francisco Gutierrez Sanín
Camilo Enrique Argoty

Índice general

1. Primera sesión: La Pepa y sus refinamientos	3
1.1. Conceptos básicos	3
1.2. La pepa	4
1.2.1. Teorema de Bondareva shapley	5
1.3. Refinamientos de la Pepa	6
1.3.1. ϵ -pepa y pepa mínima	6
1.4. Ejemplos	6
1.4.1. Ejemplo de un Juego Clasico Balanceado.	6
1.4.2. El juego de Los Guantes (The gloves game)	7
1.4.3. El Juego del Cofre	8
2. Segunda sesión: Otros conceptos de equilibrio	9
2.1. Conjunto de negociación	9
2.2. Prekernel y kernel	10
2.3. Prenucleolo y nucleolo	11
2.4. El valor de Shapley	11
2.4.1. Propiedades deseables de una solución	11
2.4.2. Aporte Marginal	12
2.4.3. El valor de Shapley	12
2.4.4. Ejemplos	13
Referencias	15

Introducción

El desarrollo de conceptos apropiados de equilibrio son el objetivo principal de la teoría de juegos en cualquier modalidad que esta presente. El concepto de equilibrio desarrollado por Nash es prueba clara de ello. Un buen concepto de equilibrio trasciende la mera teorización y se convierte en eje fundamental de las aplicaciones de la teoría.

En el caso de la teoría de juegos cooperativa, no existe hasta ahora un concepto de equilibrio tan poderoso y completo como el desarrollado por Nash para la teoría de juegos no cooperativa. Existen algunos intentos de conceptos de equilibrio que han logrado mas o menos exito. El objetivo de estas notas es dar un pequeño inventario de algunos conceptos de equilibrio que existen en teoría de juegos cooperativa.

Estas notas tienen su origen en el cursillo dictado por los autores en marco del XVII Congreso Nacional de Matemáticas, realizado en Cali, Valle. En el capítulo 1 analizamos en primer lugar lo que en su traducción española se conoce como la PEPA. Este es el principal concepto de equilibrio que existe en teoría de juegos cooperativa. En el capítulo 2 introducimos otros conceptos como conjunto de negociación, kernel, prekernel, núcleo, nucleolo y estudiamos el famoso valor de Shapley, el cual es una herramienta básica desarrollada para juegos cooperativos.

Agradecemos la colaboración de Leonardo Cortéz y Miguel Correa, estudiantes de matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda.

Capítulo 1

Primera sesión: La Pepa y sus refinamientos

1.1. Conceptos básicos

1.1.1 Definición. Un *juego cooperativo*, es un par ordenado (N, v) donde N es un conjunto de jugadores y v es una función

$$v : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Un conjunto $S \in \mathcal{P}(N)$ es llamado *coalición*.

De aquí en adelante, la letra n denotará el tamaño de N ($n = \#(N)$).

1.1.2 Definición. Un juego cooperativo (N, v) se dice:

1. *superaditivo* si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$
2. *aditivo* o *inescencial* si $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$
3. *subaditivo* si $v(S \cup T) = v(S) \leq v(T)$
4. *débilmente superaditivo* si $v(S \cup \{i\}) \geq v(S) + v(\{i\})$

5. de *suma constante* si $v(S) + v(N - S) = v(N)$

6. *convexo* si $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$

7. *zero-normalizado* si $v(i) = 0$ para todo $i \in N$

8. *monótona* si $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$

para todo $S, T \in \mathcal{P}(N)$ con $S \cap T \neq \emptyset$.

Nótese que para un juego cooperativo (N, v) se tiene la siguiente implicación:

CONVEXIDAD \Rightarrow SUPERADITIVIDAD \Rightarrow SUPERADITIVIDAD DEBIL

1.1.3 Definición. Dos juegos (N, v) y (M, w) son *estratégicamente equivalentes* si existe $\alpha > 0$ y $\beta : N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para toda coalición $S \in N$, $w(S) = \alpha v(s) + \beta(s)$. Igualmente, v se dice *simétrica* si $S_N = S_{N/v}$ y un juego (N, v) se dice *simétrico* si y solo si

$$|S| = |T| \implies v(S) = v(T)$$

1.2. La pepa

La *pepa* es el conjunto de asignaciones tal que la suma en cada asignación sobre cada conjunto de asignaciones, sobre cada conjunto de jugadores es mayor que el valor que le da al juego como coalición. La pepa es una solución del juego cooperativo

$$C(N, \nu) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = \nu(N); \sum_{i \in S} x_i \geq \nu(S), \forall S \subseteq N \right\}$$

La pepa de un juego puede ser vacía. Los juegos de pepa no vacía se llaman balanceados. Si la pepa es no vacía, la pepa no contiene necesariamente un único vector. Un juego que no tenga una asignación que cumpla con las condiciones para pertenecer a la pepa, se llama un *juego de pepa vacía*.

1.2.1. Teorema de Bondareva shapley

1.2.1 Definición. Una aplicación $\lambda : \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ se dice *balanceada*, si

$$\sum_{S \in \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\}} \lambda(S) \chi_S = \chi_N$$

1.2.2 Definición. Una colección B de coaliciones, se dice *balanceada* si existe una aplicación balanceada λ tal que

$$B = \{S \in \mathcal{P}(N) : \lambda(S) > 0\}$$

1.2.3 Definición. Un juego se dice *balanceado*, si para cada aplicación λ balanceada, se tiene

$$\sum_{S \in \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\}} \lambda(S) v(S) \leq v(N)$$

1.2.4 Teorema (Teorema de Bondareva-Shapley). *Un juego cooperativo (N, v) tiene pepa no vacía si y sólo si (N, v) es un juego balanceado.*

Demostración. Si $C(v) \neq \emptyset$ entonces

$$v(N) = \min \sum_{i \in N} x_i$$

sujeto a:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

para todo $S \in \mathcal{P}(N) \setminus \emptyset$

Aplicando el principio de dualidad en programación lineal, se obtiene que dicho problema tiene solución si y solo si el siguiente problema lo tiene

$$\text{máx} \sum_{S \in \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\}} \lambda(S) v(S)$$

sujeto a:

$$\sum_{i \in S} \lambda(S) \chi_S = \chi_N$$

Pero esto es equivalente a decir que el juego es balanceado.

□

1.3. Refinamientos de la Pepa

1.3.1. ϵ -pepa y pepa mínima

1.3.1 Definición. Sea (N, v) un juego cooperativo con una estructura de coaliciones \mathbb{R} , y sea $\epsilon > 0$. Se define la ϵ -pepa el siguiente conjunto:

$$C_\epsilon(N, \nu) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = \nu(N); \sum_{i \in S} x_i \geq \nu(S) - \epsilon, \forall S \subseteq N \right\}$$

1.3.2 Definición. Sea (N, v) un juego cooperativo con una estructura de coaliciones \mathbb{R} . La *pepa mínima* es la intersección de las ϵ -pepas no vacías donde $\epsilon > 0$.

1.4. Ejemplos

1.4.1. Ejemplo de un Juego Clasico Balanceado.

Consideremos un juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y las siguientes asignaciones:

$v(S) = 0$ si $|S| \leq 1$, $v(S) = 60$ si $S = \{1, 2\}$; $v(S) = 48$ si $S = \{1, 3\}$; $v(S) = 30$ si $S = \{2, 3\}$; $v(S) = 72$ si $S = N$

para confirmar que el juego es balanceado, sea $\lambda : \mathcal{P} - \{\emptyset\} \rightarrow [0, 1]$ una aplicacin balanceada. Como $v(i) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ y $v(i, j) > 0$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. Como λ es balanceada sabemos que las siguientes ecuaciones se cumplen:

$$\lambda(1, 2) + \lambda(1, 3) + \lambda(1, 2, 3) = 1$$

$$\lambda(1, 2) + \lambda(2, 3) + \lambda(1, 2, 3) = 1$$

$$\lambda(1, 3) + \lambda(2, 3) + \lambda(1, 2, 3) = 1$$

as, tenemos que $\lambda(1, 2) = \lambda(1, 3) = \lambda(2, 3) = \frac{1 - \lambda(1, 2, 3)}{2}$, luego, λ puede ser identificada como $\lambda(1, 2, 3) \in [0, 1]$, as:

$$\sum_{S \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}} \lambda(S) v(S) = \frac{1 - \lambda(1, 2, 3)}{2} 60 + \frac{1 - \lambda(1, 2, 3)}{2} 48 + \frac{1 - \lambda(1, 2, 3)}{2} 30$$

$$+\lambda(1, 2, 3)72 = 69 + 3\lambda(1, 2, 3) \leq 72 = v(N)$$

Por lo tanto el juego es balanceado y así tiene Pepa no vacía. Veamos entonces cuáles son los elementos de la Pepa.

Un elemento x de la Pepa debe satisfacer las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, & x_2 &\geq 0, & x_3 &\geq 0, \\ x_1 + x_2 &\geq 60, & x_1 + x_3 &\geq 48, & x_2 + x_3 &\geq 30, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 72 \end{aligned}$$

Entonces, por ejemplo, la asignación $(x_1, x_2, x_3) = (40, 22, 10)$ está en la Pepa del juego (N, v) . Es claro que existen más asignaciones dentro de la Pepa, de hecho, la Pepa es la envolvente convexa de las tres asignaciones $(42, 24, 6)$, $(42, 18, 12)$ y $(36, 24, 12)$.

1.4.2. El juego de Los Guantes (The gloves game)

Sea $N = \{1, \dots, n\}$, tal que N está dividido en dos subconjuntos disjuntos I y D . Cada jugador de I posee un guante izquierdo y cada jugador de D posee un guante derecho. Se le da un valor de la siguiente manera: si existe una pareja con un guante derecho y un guante izquierdo se les paga 1. En otro caso el valor dado será 0.

Podemos modelar esta situación como un juego (N, v) donde para cada $S \in \mathcal{P}(N)$ se tiene que $v(S) := \min\{|I \cap S|, |D \cap S|\}$

Analizamos este juego tomando $n = 3$ donde $\{1, 2\} = I$ y $\{3\} = D$. Veamos si el juego tiene Pepa y en caso de tenerla mostremos cuál es.

Notemos al vector (a, b, c) como el vector de asignación de pagos para cada jugador donde a es la paga del jugador 1, b es la paga del jugador 2 y c es el pago del jugador 3.

Para que (a, b, c) esté en la Pepa, debe cumplir las siguientes desigualdades: $a+b \geq v(a, b) = 0$; $a+c \geq v(a, c) = 1$; $c+b \geq v(c, b) = 1$; $a \geq v(a) = 0$; $b \geq v(b) = 0$; $c \geq v(c) = 0$. Además, tenemos $a + b + c = 1 = v(N)$.

Luego, resolviendo las ecuaciones

$$a + c \geq 1; a + b + c \geq 1 + b; 1 \geq 1 + b. \text{ Entonces } b=0.$$

$$b + c \geq 1; a + b + c \geq 1 + a; 1 \geq 1 + a. \text{ Entonces } a=0.$$

Por lo tanto, $c = 1$. Así se tiene que la pepa es no vacía, porque la asignación $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ está en ella y también es la única que se encuentra allí.

Notese que el juego posee ϵ -Pepa siempre y cuando tomemos $\epsilon = 1$

1.4.3. El Juego del Cofre

El juego consiste en lograr abrir un cofre que necesita de dos personas para poder abrirlo. Sea $N = \{1, 2, 3\}$, entonces se da una valuación como sigue:

$$v(S) = 1 \quad s \in \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$v(S) = 0 \text{ en otro caso.}$$

Nótese que éste juego es Superaditivo y Montono. el conjunto de las pagos eficientes para este juego es

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

y el conjunto de todos los pagos que son individualmente racionales y eficientes es el conjunto de asignaciones

$$I(N, v) =$$

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1; x_i \geq 0 \forall i \in \{1, 2, 3\}\}$$

Por ejemplo, la asignación $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ es un pago que es eficiente, pero no es individualmente racional.

El juego de el cofre no es balanceado, luego, tiene pepa vacía, que se demuestra con de la siguiente manera.

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i \in N} x_i = v(N) = 1, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\}$$

Se tiene: $a, b, c \geq 0$; $a + b \geq 1$; $a + c \geq 1$; $c + b \geq 1$

Además, tenemos $a + b + c = 1 = v(N)$, luego, resolviendo las ecuaciones $a + c \geq 1$, $a + b + c \geq 1 + b$, $1 \geq 1 + b$. Entonces, $b = 0$ y ($a \geq 1$) o ($c \geq 1$)

$b + c \geq 1$, $a + b + c \geq 1 + a$, $1 \geq 1 + a$. Entonces $a = 0$.

$a + b + c \geq 1 + c$, $1 \geq 1 + c$. Entonces $c = 0$, pero $c \geq 1$ por tanto se llega a una contradicción, así, tiene pepa vacía.

Capítulo 2

Segunda sesión: Otros conceptos de equilibrio

2.1. Conjunto de negociación

2.1.1 Definición. Una *estructura de coaliciones* \mathcal{R} para un juego cooperativo (N, v) es una partición del conjunto de jugadores N .

2.1.2 Definición. Dado un juego cooperativo (N, v) y una estructura de coaliciones \mathcal{R} sobre N , se define el conjunto de *imputaciones* de (N, v, \mathcal{R}) como el conjunto:

$$I(N, v, \mathcal{R}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(S) \leq v(S) \text{ para todo } S \in \mathcal{R} \text{ y } x_i \geq v(\{i\}) \text{ para todo } i \in N\}$$

2.1.3 Definición. Dados $k, l \in N$ distintos sea T_{kl} el conjunto:

$$T_{kl} = \{S \subseteq N \setminus \{l\} \mid k \in S\}$$

2.1.4 Definición. Sean $k, l \in N$ diferentes. Una *objeción* de k contra l en $x \in \mathbb{R}^n$ es un par (P, y) tal que:

1. $P \in T_{kl}$
2. $y \in \mathbb{R}^{\#(P)}$
3. $y_i \geq x_i$ para todo $i \in P$
4. $y(P) \leq v(P)$

2.1.5 Definición. Sean k, l distintos y (P, y) una objeción de k contra l en x . Una *contraobjeción* de l contra k es un par (Q, z) tal que:

1. (Q, z) es una objeción de l contra k
2. $z_j \geq y_j$ para todo $j \in P \cap Q$.

Una imputación $x \in I(N, V, \mathcal{R})$ se dice *estable* si toda objeción en x tiene una contraobjeción.

2.1.6 Definición. Dado un juego cooperativo (N, v) con una estructura de coaliciones \mathcal{R} , el *conjunto de negociación* de (N, v, \mathcal{R}) es el conjunto:

$$\mathcal{M}(N, v, \mathcal{R}) = \{x \in I(N, v, \mathcal{R}) \mid x \text{ es estable}\}$$

2.2. Prekernel y kernel

2.2.1 Definición. Sean $S \subseteq N$ y $x \in \mathbb{R}^N$. El *exceso* de S en x es el valor:

$$e(S, x, v) = v(S) - x(S)$$

2.2.2 Definición. Sean $k, l \in N$ diferentes y $x \in \mathbb{R}^N$. La *máxima ganancia* de k sobre l en x es el valor:

$$s_{kl}^x = \max\{e(S, v, x) \mid S \in T_{kl}\}$$

Si $k, l \in R \in \mathcal{R}$ y $s_{kl} > s_{lk}$, se dice que el jugador k *sobrepasa* al jugador l y esto se denota $k \succ_x l$.

2.2.3 Definición. Dado un juego (N, v) con una estructura de coaliciones \mathcal{R} , se define el *prekernel* como el conjunto:

$$\mathcal{PK}(N, v, \mathcal{R}) = \{x \in X(N, v, \mathcal{R}) \mid s_{kl}^x = s_{lk}^x \text{ y } k \neq l\}$$

2.2.4 Definición. Sea (N, v) un juego con una estructura de coaliciones \mathcal{R} , se define el *kernel* como el conjunto:

$$\mathcal{K}(N, v, \mathcal{R}) = \{x \in I(N, v, \mathcal{R}) \mid \text{para todos } k \neq l \text{ si } x_k > v(\{i\}) \text{ entonces } s_{kl}^x \geq s_{lk}^x\}$$

2.3. Prenucleolo y nucleolo

2.3.1 Definición. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $H = \{h_i\}_{i \in D}$ un conjunto de funciones $h_i : X \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $d = \#(D)$. Dado $k = 1 \cdots d$, se definen las funciones $\theta_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$\theta_k(x) = \max_{T \subseteq D, \#(T)=k} \min_{i \in T} h_i(x)$$

donde $x \in X$.

Denotamos \leq_{lex} al orden lexicográfico en \mathbb{R}^d .

2.3.2 Definición. Sea (N, v) un juego cooperativo con una estructura de relaciones \mathcal{R} y $H = \{h_i\}_{i \in D}$ un conjunto de funciones de valor real definidas en X . El *nucleolo* H con respecto a X se define como el conjunto:

$$\mathcal{N}(H, X) = \{x \in X \mid \theta(y) \geq_{lex} \theta(x) \forall y \in X\}$$

2.3.3 Definición. El caso particular en el que $X = X^*(N, v, \mathcal{R})$ y $H = \{e(S, \cdot, v) \mid S \in \mathcal{P}(N)\}$, el nucleolo de H con respecto X se denomina el *prenucleolo* de (N, v, \mathcal{R}) .

2.3.4 Definición. El caso particular en el que $X = I(N, v, \mathcal{R})$ y $H = \{e(S, \cdot, v) \mid S \in \mathcal{P}(N)\}$, el nucleolo de H con respecto X se denomina el *nucleolo* de (N, v, \mathcal{R}) .

2.4. El valor de Shapley

2.4.1. Propiedades deseables de una solución

Sea $2^{\mathcal{P}(N)}$ el conjunto funciones de valor real sobre el conjunto de coaliciones de N jugadores. Una función $\phi : 2^{\mathcal{P}(N)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface

- **Racionalidad Individual** si $\phi_i(v) \geq v(\{i\})$
- **Eficiencia** si $\sum_{i=1}^n \phi_i(v) = v(N)$
- **Propiedad del Jugador Inútil** si $i \in N$ es un jugador tal que $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N$, entonces $\phi_i(v) = 0$
- **Aditividad** si $\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w)$
- **Simetría** si dados dos jugadores i, j tales que $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ para todo $S \subseteq N$, entonces $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.

2.4.2. Aporte Marginal

2.4.1 Definición. Para todo $i \in N$ y todo $S \in \mathcal{P}(N)$, con $i \in S$, la *contribución marginal* del jugador i en la coalición S se define como la ganancia adicional que aporta el jugador i al entrar a la coalición S .

$$M_i(S, v) := v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

2.4.3. El valor de Shapley

El valor de Shapley es la paga promedio que recibe un jugador, o, el promedio de los valores marginales m de un juego v . Desde otro punto de vista es el valor mínimo por el que un jugador entra a una coalición. $\phi(v) = \sum_{\sigma \in \pi(N)} m^\sigma(v)$ o de otra forma

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{S(N)-\{i\}} (|S|!(n - |S| - 1)!(v(S \cup \{i\}) - v(S)))$$

Supongamos que en una empresa existe un propietario P que no trabaja, pero que provee de un aporte capital crucial para su funcionamiento. En otras palabras, sin él no se pueden obtener ganancias.

Cada trabajador W_1, W_2, \dots, W_k contribuye en un monto r del total de la ganancia. Entonces $N = \{P, W_1, \dots, W_k\}$.

Por tanto $v(S) = 0$ si P no está en la coalición S . $v(S) = mr$ si S contiene m trabajadores y al propietario. La idea es ver que el valor de Shapley para el propietario es $k * r/2$ y $r/2$ para cada trabajador.

El valor de Shapley es el vector único que satisface aditividad, anonimato, eficiencia y la propiedad del jugador inútil. Mostremos esta afirmación:

(*Aditividad*) se sigue directamente del hecho que $m^\sigma(v+w) = m^\sigma(v) + m^\sigma(w)$.

(*Eficiencia*) Notese que Φ es una combinación convexa de m^σ y $\sum_{i \in N} m_i^\sigma(v) = v(N)$ para cada $\sigma \in \pi(N)$

(*Propiedad del jugador inútil*) Notese que $\frac{1}{n} \sum_{S: i \notin S} (|S|!(n - |S| - 1)!) = 1$

(*Anonimato*) Veamos en dos partes esta propiedad.

- veamos que $\rho * (m^\sigma(v)) = m^{\rho\sigma}(v^\rho)$

$$(m^{\rho\sigma}(v^\rho))_{\rho\sigma(i)} =$$

$$\begin{aligned}
& v^\rho(\rho\sigma(1), \dots, \rho\sigma(i)) - v^\rho(\rho\sigma(1), \dots, \rho\sigma(i-1)) \\
&= v(\sigma(1), \dots, \sigma(i)) - v(\sigma(1), \dots, \sigma(i-1)) \\
&= (m^\sigma(v))_{\sigma(i)} = \rho * (m^\sigma(v))_{\rho\sigma(i)}
\end{aligned}$$

- Sea $v \in J^N$ y $\rho \in \pi(N)$, usando la parte anterior, $\rho \rightarrow \rho\sigma$ es una sobreyección en $\pi(N)$ y la linealidad de $\rho*$

$$\begin{aligned}
\Phi(v^\rho) &= \frac{1}{n!} \sum m^{\rho\sigma}(v^\rho) = \frac{1}{n!} \sum \rho * (m^\sigma(v)) \\
&= \rho * \left(\frac{1}{n!} \sum m^\sigma(v) \right) = \rho * (\Phi(v))
\end{aligned}$$

2.4.4. Ejemplos

El juego de los guantes

El valor de Shapley está dado por

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{N!} \sum_R (v(P_i^R \cup \{i\}) - v(P_i^R))$$

Donde R es un ordenamiento de jugadores y P_i^R es el conjunto de jugadores en N que preceden a i en el orden R .

$$N = \{1, 2, 3\}$$

Analicemos el jugador 1 como pibote.

R	valor marginal
1, 2, 3	$v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
1, 3, 2	$v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
2, 1, 3	$v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) = 0 - 0 = 0$.
2, 3, 1	$v(\{2, 3, 1\}) - v(\{2, 3\}) = 1 - 1 = 0$.
3, 2, 1	$v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 1 - 1 = 0$.
3, 1, 2	$v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) = 1 - 0 = 1$.

Analicemos el jugador 2 como pibote.

R	valor marginal
1, 2, 3	$v(\{1, 2\}) - v(\{a\}) = 0 - 0 = 0$.
1, 3, 2	$v(\{1, 2, 3\}) - v(\{a, c\}) = 1 - 1 = 0$.
2, 1, 3	$v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
2, 3, 1	$v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
3, 2, 1	$v(\{2, 3\}) - v(\{3\}) = 1 - 0 = 1$.
3, 1, 2	$v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 1 - 1 = 0$.

Analicemos el jugador 3 como pibote.

R	valor marginal
1, 2, 3	$v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 1 - 0 = 1$.
1, 3, 2	$v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) = 1 - 0 = 1$.
2, 1, 3	$v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 1 - 0 = 1$.
2, 3, 1	$v(\{2, 3\}) - v(\{2\}) = 1 - 0 = 1$.
3, 2, 1	$v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
3, 1, 2	$v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.

Así tenemos que

$$\Phi_1(v) = 1(1/6) = 1/6$$

$$\Phi_2(v) = \Phi_1(v) = 1/6$$

$$\Phi_3(v) = 4/6.$$

El juego del cofre

El valor de Shapley est dado por

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{N!} \sum_R (v(P_i^R \cup \{i\}) - v(P_i^R))$$

Donde R es un ordenamiento de jugadores y P_i^R es el conjunto de jugadores en N que preceden a i en el orden R .

$$N = \{1, 2, 3\}$$

analicemos el jugador 1 como pibote.

R	valor marginal
1, 2, 3	$v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
1, 3, 2	$v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
2, 1, 3	$v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) = 1 - 0 = 1$.
2, 3, 1	$v(\{2, 3, 1\}) - v(\{2, 3\}) = 1 - 1 = 0$.
3, 2, 1	$v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 1 - 1 = 0$.
3, 1, 2	$v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) = 1 - 0 = 1$.

analicemos el jugador 2 como pibote.

R	valor marginal
1, 2, 3	$v(\{2, 1\}) - v(\{a\}) = 1 - 0 = 1$.
1, 3, 2	$v(\{1, 2, 3\}) - v(\{a, c\}) = 1 - 1 = 0$.
2, 1, 3	$v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
2, 3, 1	$v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
3, 2, 1	$v(\{2, 3\}) - v(\{3\}) = 1 - 0 = 1$.
3, 1, 2	$v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 1 - 1 = 0$.

analicemos el jugador 3 como pibote.

R	valor marginal
1, 2, 3	$v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 1 - 1 = 0$.
1, 3, 2	$v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) = 1 - 0 = 1$.
2, 1, 3	$v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 1 - 1 = 0$.
2, 3, 1	$v(\{2, 3\}) - v(\{2\}) = 1 - 0 = 1$.
3, 2, 1	$v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.
3, 1, 2	$v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.

Bibliografía

- [1] KUHN H. (Ed) (1997): *Clasics in game theory*. Princeton University Press.
- [2] PELEG B. (1984): *Game theoretic analysis in voting comitees*. Cambridge University Press.
- [3] PELEG, B. y SUDHOLTER, P. (2003): *Introduction to the Theory of Cooperative Games*. Kluwer Academic Publications.
- [4] RODICA, B. DINKO, D. y STEF, T.(2005): *Models in Cooperative Game Theory*, in Lecturesnotes in Economics and Mathematical Systems, 556. Springer.
- [5] SLIKKER, M. y VAN DEN NOUWELAND A. (2001): *Social and Economic Networks in Cooperative Game Theory*. Kluwer Academic Publications.