

Teoría de modelos de espacios de Hilbert expandidos
por medio de operadores normales

Camilo Enrique Argoty Pulido

Universidad Sergio Arboleda
Departamento de Matemáticas
Informes de investigación

Índice general

1. Introducción	3
2. Lógica continua	5
3. Teoría Espectral	12
4. Definibilidad	19
5. La teoría de $\langle \mathcal{H}, N \rangle$	25
6. Estabilidad	28
Bibliography	31

Capítulo 1

Introducción

Comenzamos con un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita \mathcal{H} y un operador normal N sobre \mathcal{H} . Se estudia la teoría de modelos de \mathcal{H} como estructura métrica: $\langle \mathcal{H}, 0, +, f_{\alpha,\beta}, \langle \cdot | \cdot \rangle, N \rangle$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ y $f_{\alpha,\beta}(x, y) = \alpha x + \beta y$ de la forma que se describe en [5]. Por brevedad nos referiremos a dicha estructura como $\langle \mathcal{H}, N \rangle$.

Los resultados más importantes de este trabajo son:

Teorema 1.1. *Los operadores definibles en la estructura $\langle \mathcal{H}, N \rangle$ son exactamente aquellos en el álgebra C^* generada por N .*

Definición 1.2. Sea T_σ la teoría espacios de Hilbert junto con las siguientes condiciones:

1. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| + |\beta| \leq 1$:

$$\sup_u \sup_v |N(f_{\alpha,\beta}(u, v)) - f_{\alpha,\beta}(N\alpha, N\beta)| = 0$$

2. $\sup_v |NN^*v - N^*Nv| = 0$

3. Para $\lambda \in \sigma_e(N)$, $V \subseteq \mathbb{C}$ conjunto abierto tal que $\lambda \in V$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$\inf_{u_1 u_2 \dots u_n} \max(|\langle u_i | u_j \rangle|, |||u_i|| - 1|, |\chi_V(N)(u_i) - \lambda u_i|) = 0$$

4. Para $\lambda \in \sigma_d(N)$ y $n_\lambda \in \mathbb{N}$ como en el Lema 5.4 y $\epsilon > 0$:

$$\inf_{u_1 u_2 \dots u_{n_\lambda}} \sup_v \max(|\langle u_i | u_j \rangle|, |||u_i|| - 1|, |Nu_i - \lambda u_i|, \epsilon \cdot \|N(v) - \lambda v\|, \|v - \sum_{k=1}^{n_\lambda} \langle v | u_k \rangle u_k\| \cdot \frac{\epsilon}{\lambda}) = 0$$

- 5.

$$\sup_v (\eta \|v\| \cdot \|Nv - \lambda v\|) = 0$$

Corolario 1.3. T_σ axiomatiza la teoría $Th \langle \mathcal{H}, N \rangle$.

Corolario 1.4. La teoría de la estructura $\langle \mathcal{H}, N \rangle$ admite eliminación de cuantificadores.

Definición 1.5. Sea $v \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq \mathcal{H}$. Entonces $P_{dcl(A)}(v)$ y $P_{acl(A)}(v)$ denotan la proyección de v sobre los espacios $dcl(A)$ y $acl(A)$ respectivamente. De la misma manera, $P_{dcl(A)^\perp}(v)$ y $P_{acl(A)^\perp}(v)$ denotan la proyección de v sobre los espacios $dcl(A)^\perp$ y $acl(A)^\perp$ respectivamente.

Definición 1.6. Sea $v \in \mathcal{H}$. Sean $A, B \subseteq \mathcal{H}$. Se dice que u es independiente de B sobre A si $P_{acl(A)}(v) = P_{acl(A \cup B)}(v)$, lo cual se denota $u \downarrow_A^* v$.

Corolario 1.7. Sea $v, w \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq \mathcal{H}$. Entonces $v \downarrow_A^* w$ si y sólo si para toda subconjunto abierto V de $\sigma(N)$, $\chi_V(N)v - \chi_V(N)P_{acl(A)}v \perp \chi_V(N)w$.

Argoty y Berenstein ([3]) han estudiado la teoría de la estructura $(H, +, 0, \langle \rangle, U)$ donde U es un operador unitario en el caso en el espectro contable. Como se mencionó anteriormente, la mayoría de los resultados aquí mostrados son generalizaciones de los resultados allí. Anterior a eso, Henson y Iovino ([13]), observaron que esta teoría es estable. Berenstein and Buechler ([8]) realizaron por primera vez una caracterización geométrica de la bifurcación en tales estructuras. Ben Yaacov, Usvyatsov and Zadka caracterizaron los operadores unitarios correspondientes a automorfismos genéricos de un espacio de Hilbert como aquellas transformaciones unitarias cuyo espectro es S^1 .

En este trabajo se estudian la definibilidad de los operadores acotados en $\langle H, N \rangle$; la relación de los tipos con la teoría espectral del operador normal acotado N ; se axiomatiza la teoría $Th \langle \mathcal{H}, N \rangle$; se da una relación de independencia específica para ella, y se caracteriza la casi ortogonalidad de los tipos. El marco para este trabajo es la lógica continua y se asume que el lector está familiarizado con algunas nociones modeloteóricas como definibilidad, clausura definible y algebraica, y bifurcación.

Este trabajo está dispuesto de la siguiente forma: En la sección 1, se introduce brevemente la teoría de modelos para lógica continua. En la sección 2, se da una introducción igualmente resumida de la Teoría Espectral. En la sección 3 se estudia la definibilidad de los operadores en \mathcal{H} . En la sección 4, se axiomatiza la teoría $Th \langle \mathcal{H}, N \rangle$. Finalmente, en la sección 5 se estudia la estabilidad de la teoría $Th \langle \mathcal{H}, N \rangle$, se da una relación de independencia entre tipos, y se caracteriza la casi ortogonalidad entre ellos.

El autor desea agradecer a la Universidad Sergio Arboleda y al programa europeo de lógica matemática y sus aplicaciones MATHLOGAPS por permitirle realizar una pasantía en el instituto Camille Jordan de la universidad Jean Bernard Lyon 1 en Lyon, Francia. De la misma manera, quiero agradecer a Itai Ben Yaacov, al Dr. Thierry Fack, al Dr. Alexander Berenstein, y Dr. C. Ward Henson por sus colaboración en la realización de este documento. Igualmente a los profesores Jesús Hernando Pérez y David Blázquez por la revisión de este trabajo.

Capítulo 2

Lógica continua

La fuente principal de este capítulo es [5]. Sea (M, d) un espacio métrico fijo de diámetro 1.

Definición 2.1. Un *predicado* sobre \mathcal{M} es una función uniformemente continua de M^n en el intervalo $[0, 1]$.

Anotación 2.2. Una función constante $R : M^n \rightarrow [0, 1]$ es un predicado sobre \mathcal{M} .

Definición 2.3. Una *función* $f \in \mathcal{M}$ es una función uniformemente continua de M^n en M .

Definición 2.4. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función uniformemente continua de un espacio métrico X en otro espacio métrico Y . Un *módulo de continuidad uniforme* para f es una función $\Delta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para todo x, y y para todo ϵ :

$$d(x, y) < \Delta(\epsilon) \implies d(f(x), f(y)) \leq \epsilon.$$

Definición 2.5. Una *estructura métrica* consiste en un espacio métrico completo y acotado (M, d) , una familia subindicada $(R_i | i \in I)$ de predicados en M , una familia subindicada $(F_j | j \in J)$ de funciones en potencias de M , y una familia subindicada $(a_k | k \in K)$ de elementos distinguidos de M . Describimos esta estructura como

$$\mathcal{M} = (M, d, R_i, F_j, a_k | i \in I, j \in J, k \in K).$$

Cuando se estudia un espacio de Banach X , usualmente se considera el espacio como una estructura multisurtida, donde se tiene una suerte para cada bola cerrada de radio entero positivo alrededor del origen. Por ejemplo, la bola unitaria de X es un espacio de diámetro 2. Usualmente se trabaja dentro de la bola unitaria.

Definición 2.6. Dada una estructura métrica \mathcal{M} , su *vocabulario* $L(\mathcal{M})$ es la unión de las familias indexadas de símbolos para predicados, funciones y constantes junto con los números naturales correspondientes a la aridad, y las funciones correspondientes al módulo de continuidad uniforme para cada símbolo.

Definición 2.7. Dado un vocabulario L , los *términos* en L se construyen inductivamente de la siguiente manera:

1. Cada símbolo de variable y constante es un término en L .
2. Si $F \in L$ es una función n -aria y t_1, \dots, t_n son términos en L , entonces $F(t_1, \dots, t_n)$ es un término en L .

Definición 2.8. Dado un vocabulario L , las *fórmulas atómicas* en L son expresiones de la forma $d(t_1, t_2)$ o $R(t_1, \dots, t_n)$ donde R es un símbolo de predicado en L y t, \dots, t_n son términos en L .

Definición 2.9. Dado un vocabulario L , las *fórmulas* en L se construyen inductivamente de la siguiente manera:

1. Las fórmulas atómicas en L son fórmulas en L .
2. Si $u : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ es continua y ϕ_1, \dots, ϕ_n son fórmulas en L , entonces $u(\phi_1, \dots, \phi_n)$ es una fórmula en L .
3. Si ϕ es un L -fórmula y x es una variable, entonces $\sup_x \phi$ y $\inf_x \phi$ son fórmulas en L .

Anotación 2.10. \sup_x y \inf_x juegan el papel de los cuantificadores en la lógica de primer orden.

Anotación 2.11. Una fórmula libre de cuantificadores es un fórmula construida usando solamente las reglas (1), (2).

Anotación 2.12. Las nociones de subfórmula y variables libres y acotadas se pueden generalizar de forma natural a la lógica continua.

Definición 2.13. Una *sentencia* en L es una fórmula en L sin variables libres.

Anotación 2.14. Se escribe $t(x_1, \dots, x_n)$ cuando t es un término en L y las variables en t están entre las variables x_1, \dots, x_n .

Anotación 2.15. Dado un término $t(x_1, \dots, x_n)$ en L , la *interpretación de t* en \mathcal{M} , es una función $t^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$ definida de la misma forma en que se hace en lógica de primer orden.

Definición 2.16. Se define el *valor* $\sigma^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ de una fórmula $\sigma(\bar{a})$ en $L(\mathcal{M})$ de la siguiente manera:

1. $(d(t_1, t_2))^{\mathcal{M}} = d^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, t_2^{\mathcal{M}})$ para cualesquiera términos t_1, t_2 en L .
2. $(P(t_1, \dots, t_n))^{\mathcal{M}} = P^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}})$ para cualquier símbolo de predicado $P \in L$ y cualesquiera términos t_1, \dots, t_n en L .
3. $(u(\sigma_1, \dots, \sigma_n))^{\mathcal{M}} = u(\sigma_1^{\mathcal{M}}, \dots, \sigma_n^{\mathcal{M}})$ para cualquier $u : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ continua y cualesquiera fórmulas $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ en $L(\mathcal{M})$.
4. $(\sup_x \phi(x))^{\mathcal{M}}$ es el supremo en $[0, 1]$ del conjunto $\{\phi(a)^{\mathcal{M}} \mid a \in M\}$ para cualquier L -fórmula $\phi(x)$ en L .

5. $(\inf_x \phi(x))^{\mathcal{M}}$ es el ínfimo en $[0, 1]$ de el conjunto $\{\phi(a)^{\mathcal{M}} | a \in M\}$ para cualquier fórmula $\phi(x)$ en L .

Anotación 2.17. $\sup \emptyset = 0$ y $\inf \emptyset = 1$

Definición 2.18. Una *afirmación* E en L es una expresión de la forma $\phi = \psi$ o $\phi \leq \psi$, donde ϕ y ψ son fórmulas en L . Se dice que E es *cerrada* si tanto ϕ como ψ son sentencias. Similarmente si ϕ y ψ son fórmulas en L libres de cuantificadores, E se denomina una *afirmación libre de cuantificadores*.

Definición 2.19. Si E es la afirmación en L $\phi(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_1, \dots, x_n)$ y $a_1, \dots, a_n \in M$, se dice que E es *válida para* $a_1, \dots, a_n \in M$ (denotado $\mathcal{M} \models E(a_1, \dots, a_n)$) si

$$\phi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = \psi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n).$$

Similarmente, si E es la L -afirmación $\phi(x_1, \dots, x_n) \leq \psi(x_1, \dots, x_n)$ y $a_1, \dots, a_n \in M$, se dice que E es *válida para* $a_1, \dots, a_n \in M$ si

$$\phi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) \leq \psi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n).$$

Definición 2.20. Dos fórmulas en L ϕ y ψ se dicen *lógicamente equivalentes* (o simplemente equivalentes) si la afirmación en L $\phi = \psi$ es válida en toda estructura de vocabulario L .

Definición 2.21. Para $i = 1, 2$, sea E_i la afirmación $\phi_i = \psi_i$. Se dice que E_1 y E_2 son *lógicamente equivalentes* si para toda estructura \mathcal{M} con vocabulario L y toda a_1, \dots, a_n se tiene:

$$\mathcal{M} \models E_1(a_1, \dots, a_n) \text{ sii } \mathcal{M} \models E_2(a_1, \dots, a_n).$$

Definición 2.22. Se define una función binaria $\dot{-} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$x \dot{-} y = \begin{cases} (x - y) & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Anotación 2.23. Si $x, y \in [0, 1]$, entonces $x \dot{-} y \in [0, 1]$.

Anotación 2.24. Toda afirmación en L es equivalente a una de la forma $\phi = 0$. por ejemplo, la afirmación $\phi \leq \psi$ es equivalente a la afirmación $|\phi \dot{-} \psi| = 0$.

Definición 2.25. Sea L un vocabulario fijo. Una *teoría* en L es un conjunto de afirmaciones en L cerradas. Si T es un teoría en L y \mathcal{M} es un estructura con vocabulario L , se dice que \mathcal{M} es un modelo de T ($\mathcal{M} \models T$) si $\mathcal{M} \models E$ para toda afirmación $E \in T$. Denotamos $Mod_L(T)$ para la colección de todas las estructuras con vocabulario L que son modelos de T . Si \mathcal{M} es una estructura con vocabulario L , la *teoría* de \mathcal{M} , denotada por $Th(\mathcal{M})$, es el conjunto de afirmaciones en L cerradas que son válidas en \mathcal{M} . Una teoría de esta forma se denomina *completa*.

Definición 2.26. Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} estructuras con vocabulario L .

1. \mathcal{M} y \mathcal{N} se dicen *elementalmente equivalentes*, $(\mathcal{M} \equiv \mathcal{N})$, si $\sigma^{\mathcal{M}} = \sigma^{\mathcal{N}}$ para toda sentencia σ en L . Equivalentemente, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ si y solo si $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$.
2. Si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ se dice que \mathcal{M} es una *subestructura elemental* de \mathcal{N} , $(\mathcal{M} \prec \mathcal{N})$, si para toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}$, $\phi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = \phi^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n)$. En este caso se dice que \mathcal{N} es una *extensión elemental* de \mathcal{M} .
3. Una función F de un subconjunto de M into N es una *aplicación elemental parcial* de \mathcal{M} into \mathcal{N} si para todo L -fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ y a_1, \dots, a_n en el dominio de F , se tiene:

$$\phi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = \phi^{\mathcal{N}}(F(a_1), \dots, F(a_n))$$

4. Una *inmersión elemental* de \mathcal{M} en \mathcal{N} es una aplicación elemental de \mathcal{M} en \mathcal{N} cuyo dominio es todo \mathcal{M} .
5. Un *isomorfismo* entre las estructuras \mathcal{M} y \mathcal{N} es una inmersión elemental entre ellas que es sobreyectiva. Dos estructuras se dicen *isomorfas* si hay un isomorfismo entre ellas.

Hecho 2.27 (Criterio de Tarski-Vaught, proposición 4.4 de [?]). Sean \mathcal{M} , \mathcal{N} estructuras con vocabulario L tales que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.
2. Para toda fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ en L y toda $\epsilon > 0$ se tiene la siguiente condición: Si $a_1, \dots, a_n \in M$ y $b \in N$, existe $c \in M$ tal que:

$$|\phi^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n, c) - \phi^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n, b)| \leq \epsilon.$$

Definición 2.28. Supongase que \mathcal{M} es un estructura con vocabulario L correspondiente a un espacio métrico (M, d) y $A \subseteq M$. Sea \mathcal{M}_A la estructura $(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$. Sea $e_1, \dots, e_n \in M$ y sean x_1, \dots, x_n variables fijas. Entonces

- El *tipo* de (e_1, \dots, e_n) sobre A en \mathcal{M} , denotado por $tp_{\mathcal{M}}(e_1, \dots, e_n/A)$, es el conjunto de afirmaciones $E(x_1, \dots, x_n)$ tales que

$$\mathcal{M}_A \models E(e_1, \dots, e_n)$$

- El *tipo sin cuantificadores* de (e_1, \dots, e_n) sobre A en \mathcal{M} , denotado por $qftp_{\mathcal{M}}(e_1, \dots, e_n/A)$, es el conjunto de afirmaciones libres de cuantificadores en L $E(x_1, \dots, x_n)$ tales que

$$\mathcal{M}_A \models E(e_1, \dots, e_n)$$

Si la estructura \mathcal{M} es clara a partir del contexto, el tipo y el tipo sin cuantificadores de (e_1, \dots, e_n) sobre A se denota simplemente como $tp(e_1, \dots, e_n/A)$ o $qftp(e_1, \dots, e_n/A)$ respectivamente.

Anotación 2.29. 1. Sea \mathcal{M} y A como se describe más arriba, y sean e_1, \dots, e_n y e'_1, \dots, e'_n elementos de \mathcal{M} . Entonces

$$tp_{\mathcal{M}}(e_1, \dots, e_n/A) = tp_{\mathcal{M}}(e'_1, \dots, e'_n/A)$$

si y solo si

$$(\mathcal{M}_A, e_1, \dots, e_n) \equiv (\mathcal{M}_A, e'_1, \dots, e'_n)$$

2. Si (\mathcal{M}, A) es como se describe más arriba y $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, entonces

$$tp_{\mathcal{M}}(e_1, \dots, e_n/A) = tp_{\mathcal{N}}(e_1, \dots, e_n/A).$$

Sea L un vocabulario para estructuras métricas, y sea $L(A)$ la extensión de L con un conjunto A de nuevos símbolos de constante. Sea T_A una teoría completa en $L(A)$ y sea T la restricción de T_A a L .

Definición 2.30. Un conjunto p de afirmaciones en L cuyas variables libres están x_1, \dots, x_n se denomina un n -tipo sobre A si existe un modelo $(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$ de T_A y elementos e_1, \dots, e_n de M tales que $p(x_1, \dots, x_n) = tp_{\mathcal{M}}(e_1, \dots, e_n/A)$. En este caso, se dice que (e_1, \dots, e_n) realiza a p .

Definición 2.31. La colección de todos los n -tipos sobre A se denota por $S_n(T_A)$, o simplemente $S_n(A)$ si T_A es clara a partir del contexto.

Hecho 2.32 (Proposition 5.15 de [?]). Hay un modelo $(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$ de T_A tal que para todo $n \geq 1$, todo n -type sobre A es realizado.

Definición 2.33. Sea L un vocabulario y μ un cardinal infinito. Una estructura \mathcal{M} con vocabulario L se denomina μ -saturada si todo tipo $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ sobre un subconjunto $A \subseteq M$ con $|A| = \mu$ es realizado en \mathcal{M} .

Definición 2.34. El *modelo monstruo* para una teoría T es una estructura μ -saturada para un cardinal μ mayor que el tamaño de cualquier conjunto de parámetros usados en este trabajo, y se denota por \mathfrak{B} .

Definición 2.35. Sea $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula en $L(A)$ y $\epsilon > 0$. Entonces

$$(\phi, \epsilon) = \{q \in S_n(T_A) \mid \text{la afirmación } \phi \leq \delta \text{ pertenece a } q \text{ para algún } \delta < \epsilon\}.$$

La *topología de la lógica* en $S_n(T_A)$ se define de la siguiente manera: Si $p \in S_n(T_A)$, la base de vecindades de p son los conjuntos de la forma (ϕ, ϵ) donde $\phi = 0$ está en p y $\epsilon > 0$.

Definición 2.36. Sea \mathcal{M}_A un modelo monstruo de T_A en el cual todo tipo en $S_n(T_A)$ es realizado, para $n \geq 1$. Sea (M, d) el espacio métrico correspondiente de \mathcal{M} y sea $p, q \in S_n(T_A)$. Entonces,

$$d(p, q) = \inf_j \{\max d(a_j, b_j) \mid \mathcal{M} \models p(a_1, \dots, a_n) \text{ y } \mathcal{M} \models q(b_1, \dots, b_n)\}$$

Anotación 2.37. Note que $(S_n(T_A), d)$ es un espacio métrico, dado que si $p, q \in S_n(T_A)$, $d(p, q)$ no depende de \mathcal{M}_A sino solamente de T_A .

Definición 2.38. Sea $p \in S_n(T)$ y $\mathcal{M} \models T$. Entonces $p(\mathcal{M}) = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid \mathcal{M} \models p(a_1, \dots, a_n)\}$.

Definición 2.39. Sea T una teoría en L y $\phi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula en L . Entonces ϕ es *aproximable por fórmulas sin cuantificadores en T* si para todo $\epsilon > 0$ hay una fórmula sin cuantificadores en L $\psi(x_1, \dots, x_n)$ tal que para todo $\mathcal{M} \models T$ y todo $a_1, \dots, a_n \in M$:

$$|\phi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) - \psi^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)| \leq \epsilon$$

Definición 2.40. Una teoría T en L *admite eliminación de cuantificadores* si toda fórmula en L es aproximable en T por fórmulas sin cuantificadores.

Definición 2.41. Sea $A \subseteq \mathcal{M}$. Un predicado $P : M^n \rightarrow [0, 1]$ es *A-definible* en \mathcal{M} si hay una sucesión $(\phi_n(\bar{x}) \mid n \geq 1)$ de $L(A)$ -fórmulas tales que los predicados $\phi_n^{\mathcal{M}}(\bar{x})$ convergen a $P(\bar{x})$ uniformemente en M^n . Un conjunto $B \subseteq \mathcal{M}$ es *A-definible* si la distancia $d(x, B)$ es A-definible en \mathcal{H} . Una función es *definible* si su grafo es definible.

Hecho 2.42 (Proposition 8.9 de [?]). Sea $D \subseteq \mathcal{M}$ cerrado. Entonces D es definible en \mathcal{M} si y solo si hay un predicado definible $P : M^n \rightarrow [0, 1]$ tal que $P(x) = 0$ para todo $x \in D$ y

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall x \in M^n (P(x) \leq \delta \Rightarrow d(x, D) \leq \epsilon).$$

Definición 2.43. Sea T un teoría, $p \in S_n(T)$ y \mathcal{M} un modelo de T completo en el sentido analítico. Entonces p es *principal* si $p(\mathcal{M})$ es un subconjunto definible de M .

Hecho 2.44 (Teorema de Omisión de tipos, version local, Teorema 10.1 de [?]). Sea T una teoría completa en un vocabulario countable, y sea $p \in S_n(T)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. p es principal.
2. p es realizado en todo modelo de T completo como espacio métrico.

Definición 2.45. Una teoría completa T se dice *separablemente categórica* si todos sus modelos separables son isomorfos.

Hecho 2.46 (Teorema 10.8 de [?]). Sea T una teoría completa en un vocabulario enumerable. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es separablemente categórica.
2. Para cada $n \geq 1$, toda type $S_n(T)$ es principal.
3. Para cada $n \geq 1$, el espacio métrico $(S_n(T), d)$ es compacto.

Definición 2.47. Sea $A \subseteq M$:

1. La *clausura definible* de A en \mathcal{M} , denotada por $dcl_{\mathcal{M}}(A)$ (o simplemente $dcl(A)$), es el conjunto de los $a \in \mathcal{M}$ tales que $\{a\}$ es A -definible en \mathcal{M} .
2. La *clausura algebraica* de A en \mathcal{M} , denotada por $acl_{\mathcal{M}}(A)$ (o simplemente $acl(A)$), es la unión de todos los subconjuntos compactos de \mathcal{M} que son A -definibles.
3. Si \mathcal{M} es completo, la *clausura acotada* de A en \mathcal{M} , $bdd_{\mathcal{M}}(A)$, (o simplemente $bdd(A)$), es el conjunto de todos los $a \in \mathcal{M}$ para los cuales hay algún cardinal μ tal que para todo $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$, el conjunto de realizaciones de $tp(a/A)$ en \mathcal{N} tiene cardinalidad menor o igual a μ .

Hecho 2.48 (Lema 1.3 en [?]). Sea L un vocabulario, sea \mathcal{M} una estructura completa, y $A \subseteq M$. Entonces, $acl_{\mathcal{M}}(A) = bdd_{\mathcal{M}}(A)$

Capítulo 3

Teoría Espectral

La siguiente sección se basa en [1] [2] y [14]. Sea $\mathcal{H} = (H, +, 0, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita sobre \mathbb{C} .

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita sobre \mathbb{C} .

Definición 3.1. Sea A un operador lineal de \mathcal{H} en \mathcal{H} . Entonces A se denomina *acotado* si el conjunto $\{\|A(u)\| : u \in H, \|u\| = 1\}$ es acotado en \mathbb{R} . Si A es acotado se define la *norma* de A de la siguiente manera:

$$\|A\| = \sup_{u \in H, \|u\|=1} \|A(u)\|$$

Definición 3.2. Sea H un espacio de Hilbert. Entonces, $B(H)$ el álgebra de los operadores lineales acotados de H en H .

Definición 3.3. Se dice que una sucesión de operadores lineales $\{A_n\}_{n \in \omega}$ *converge uniformemente* a un operador A , si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\| = 0$.

Definición 3.4. Dado un operador lineal $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, su *operador adjunto*, denotado A^* es el operador lineal $A^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que para toda $u, v \in \mathcal{H}$, $\langle Au | v \rangle = \langle u | A^*v \rangle$.

Definición 3.5. Sea N un operador lineal de \mathcal{H} to \mathcal{H} . N se denomina *normal* si N conmuta con su adjunto N^* .

Definición 3.6. Sea U un operador lineal en H . U se denomina *unitario* si U es una isometría o, equivalentemente, $U^{-1} = U^*$.

Definición 3.7. Sea F un operador lineal de H a H . F se dice de *rango finito* si $\dim(FH) < \infty$.

Definición 3.8. Un operador lineal K se denomina *compacto* si existe una sucesión (F_n) de operadores de rango finito tal que F_n converge a K .

Hecho 3.9. Un operador lineal K es compacto si y solo si $\{Kv | \|v\| \leq 1\}$ está contenido en un conjunto compacto.

Definición 3.10. Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach compleja en H . \mathcal{A} se denomina un álgebra C^* si existe una aplicación $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, llamada *involución* tal que $a, b \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$:

1. $(a + b)^* = a^* + b^*$
2. $(ab)^* = b^*a^*$
3. $(\alpha a)^* = \bar{\alpha}a^*$
4. $(a^*)^* = a$
5. $|a^*a| = |a|^2$

Hecho 3.11. $B(H)$ es un álgebra C^* bajo la operación de adjunción.

Definición 3.12. Sea \mathcal{A} un álgebra de Banach compleja. Una subálgebra $I \subseteq \mathcal{A}$ se denomina un *ideal* de \mathcal{A} , si para todo $a \in \mathcal{A}$ y $i \in I$, tanto ia como ai pertenecen a I .

Hecho 3.13. El álgebra C^* $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ de los operadores compactos acotado en el espacio de Hilbert \mathcal{H} es un ideal cerrado en el álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de los operadores lineales acotados.

Definición 3.14. El álgebra C^* $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ se denomina el *álgebra de Calkin* en \mathcal{H} y se denota $\mathcal{C}(\mathcal{H})$.

Hecho 3.15. Sea G el grupo de los operadores unitarios en H . Entonces, H module irreducible para G .

Demostración. Dados $v, w \in H$ tales que $\|v\| = \|w\|$, existe a operador unitario U tal que $Uv = w$. □

Definición 3.16. $\mathcal{C}(\sigma(N), \mathbb{C})$ es el conjunto de las funciones continuas de $\sigma(N)$ en \mathbb{C} . $\mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C})$ es el conjunto de las funciones borel acotadas de $\sigma(N)$ en \mathbb{C} .

Definición 3.17. Sea $N \in B(H)$ un operador normal. Sea $\hat{\cdot}$ la función que a cada polinomio $p(x) = \sum_{i,j=0}^n c_{i,j}x^i\bar{x}^j$ le asigna $\hat{p}(N) = \sum_{i,j=0}^n c_{i,j}N^i(N^*)^j$

Definición 3.18. Sea \mathcal{A} un álgebra compleja. Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces el *espectro* de a es el conjunto $\sigma(a)$ de valores complejos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que el operador $A - \lambda I$ no es invertible. El *espectro* de un operador lineal T es el conjunto $\sigma(T)$ de valores complejos $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que el operador $T - \lambda I$ no es invertible. El conjunto $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ se denomina el *conjunto resolvente* para a y se denota $\pi(a)$. Según lo anterior, si T es un operador en un espacio de Hilbert H , entonces $\sigma(T)$ es el espectro de T como elemento del álgebra $B(H)$ es decir, es el conjunto de valores complejos λ tales que $T - \lambda I$ no es operador invertible en $B(H)$; así mismo, $\pi(T)$ es el conjunto resolvente de T como elemento del álgebra $B(H)$ es decir, es el conjunto de valores complejos λ tales que $T - \lambda I$ es un operador invertible en $B(H)$.

Hecho 3.19 (Teorema 2.3.1 en [2]). Sea $N \in B(H)$ un operador normal. Entonces, la anterior función se extiende de forma única a un isomorfismo isométrico de álgebras C^* de $\mathcal{C}(\sigma(N), \mathbb{C})$ en el álgebra C^* generada por N y el operador identidad I .

Hecho 3.20 (Corollary IX.4.1 en [?]). El anterior isomorfismo es tal que si f es una función univaluada y analítica en un conjunto abierto V que contiene a $\sigma(T)$, entonces

$$f(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(\lambda)(T - \lambda I)^{-1} d\lambda$$

donde, $\Gamma \subseteq \sigma(T)$ es una curva que contiene a $\sigma(T)$ en su interior.

Teorema 3.21 (Teorema 2.6.3 en [2]). Sea N un operador normal en \mathcal{H} , sea $\mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C})$ el álgebra de las funciones complejas borel medibles de $\sigma(N)$. Entonces existe un monomorfismo isométrico $\pi : \mathcal{B}(\sigma(N)) \rightarrow B(\mathcal{H})$ tal que $\pi(\bar{f}) = (\pi(f))^*$, $\pi(1) = Id$ y si $f = \sum_i \sum_j a_{ij} z^i \bar{z}^j$, entonces $\pi(f) = \sum_i \sum_j a_{ij} N^i (N^*)^j$, donde 1 denota la función constante en $\sigma(N)$ con valor 1 .

Definición 3.22. Sea P un operador lineal en $B(H)$. P se denomina una *proyección* si $P^2 = P$. Si P_1 y P_2 son proyecciones, su *intersección* es la proyección $P_1 \wedge P_2 = P_1 P_2$ y su *unión* es la proyección $P_1 \vee P_2 = P_1 + P_2 - P_1 P_2$.

Definición 3.23. Una *álgebra booleana de proyecciones* sobre un espacio de Hilbert H es un conjunto de proyecciones en H que es cerrado bajo las operaciones \wedge y \vee y contiene la proyección cero y la identidad.

Definición 3.24. Una *medida espectral* en un espacio de Hilbert H es un homomorfismo de álgebra booleana ξ de subconjuntos del plano complejo en un álgebra booleana de proyecciones en H que a la unidad le asigna el operador identidad. Se dice que la medida espectral es *acotada* si las normas de las proyecciones son acotadas en su rango.

De [16]:

Teorema 3.25. Sea X un espacio de Hausdorff localmente convexo en el cual todo conjunto abierto es una unión enumerable de conjuntos compactos. Sea λ cualquier medida positiva sobre conjuntos de Borel en X tal que $\lambda(K) < \infty$ para todo conjunto compacto K . Entonces λ es regular.

Teorema 3.26. Sea $v \in \mathcal{H}$ y sea m la medida de Lebesgue sobre $\sigma(N)$. Entonces la función de conjunto tal que a todo conjunto de borel $S \subset \sigma(N)$ le asigna el valor $\|E_S(v)\|^2$ es una medida regular.

Demostración.

$$\|E_S(v)\|^2 = \left\langle \int_S dE_\lambda(v) \mid v \right\rangle$$

por la linealidad de producto interno, esta es una medida y por el Teorema 3.25, esta es una medida regular. \square

Definición 3.27. Dado $v \in H$, la medida anteriormente definida se denota μ_v y se denomina *medida espectral definida por v* .

También de [16]:

Hecho 3.28 (Teorema de Luzin). Sea X un localmente compact Hausdorff space. Sea μ una medida regular sobre X . Sea $A \subset X$ tal que $\mu(A) < \infty$. Sea f una función compleja medible en X tal que, $f(x) = 0$ para $x \in X \setminus A$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces, existe $g \in \mathcal{C}(X)$ con soporte compacto, tal que:

$$\mu\{x \mid f(x) \neq g(x)\} < \epsilon$$

y

$$\sup_{x \in X} |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Corolario 3.29. Sea $v \in \mathcal{H}$, $f \in \mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C})$ y $\mu(S) = \|\mathcal{E}_S(v)\|^2$. Entonces existe una sucesión $(g_k) \subseteq \mathcal{C}(\sigma(N), \mathbb{C})$ tal que (g_k) converge en medida a f .

Demostración. Por Teorema 3.26 μ es una medida regular y por el teorema de Luzin, la conclusión es inmediata. \square

Definición 3.30. Sea T un operador en un espacio de Hilbert H . Sea E una medida espectral en un álgebra booleana ξ tal que $\emptyset, \mathcal{C} \in \xi$. E se denomina una *resolución de la identidad* (o una *resolución espectral*) para T si para todo $\delta \in \xi$, $E(\delta)$ conmuta con T y $\sigma(TE(\delta)) \subseteq \delta$

Hecho 3.31 (Teorema X.2.1 en [?]). Sea N un operador normal acotado en H . Entonces, N determina de forma única una medida espectral autoadjunta regular countablemente aditiva en los conjuntos de Borel del plano complejo que se anula en $\pi(N)$, y tiene la propiedad de que para todo $f \in \mathcal{C}(\sigma(N), \mathbb{C})$

$$f(N) = \int_{\sigma(N)} f(\lambda) d(E(\lambda)),$$

donde esta integral es una generalización de la que aparece en 3.20.

Definición 3.32. Dado un operador normal A , un número complejo λ se denomina *valor propio* o *valor espectral puntual* de A si el operador $A - \lambda I$ no es uno a uno. El conjunto de valores espectrales puntuales se denomina *espectro puntual* y se denota $\sigma_p(T)$. Un número complejo λ se denomina un *valor espectral continuo* si el operador $A - \lambda I$ es uno a uno y el operador $(A - \lambda I)^{-1}$ es densamente definido pero no es acotado. The conjunto de valores espectrales continuos se denomina *espectro continuo* y se denota $\sigma_c(T)$.

Definición 3.33. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\epsilon > 0$, $\bar{D}(\lambda, \epsilon)$ denota el disco cerrado con centro λ y radio ϵ .

Definición 3.34. Dado $A \subseteq \mathbb{C}$, la función característica de A se denota $\chi(A)$.

El siguiente Lema y el Lema ?? son resultado de discusiones con el Dr Thierry Fack de la universidad Lyon 1 Instituto Camille Jordan:

Lema 3.35. *Sea N un operador normal en H . Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- I $\lambda \in \sigma(N)$
- II Para todo $\epsilon >$, $\chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(N) \neq 0$

Demostraci3n(i) \Rightarrow (ii) Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que $\chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(N) = 0$. Let

$$f(z) = \frac{1 - \chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(z)}{z - \lambda}.$$

Por el Hecho 3.21 (c3lculo funcional), we have that,

$$f(N)(N - \lambda I) = (N - \lambda I)f(N) = I - \chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(N) = I,$$

dado que $\chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(N) = 0$. Pero esto significa que $N - \lambda I$ es invertible en $B(H)$ y por lo tanto $\lambda \notin \sigma(N)$

(ii) \Leftarrow (i) Supongamos que $\lambda \notin \sigma(N)$. Entonces $N - \lambda I$ es invertible en $B(H)$. Sea T una inversa para $N - \lambda I$, entonces

$$T(N - \lambda I) = I. \tag{3.1}$$

Por Hip3tesis, para todo $\epsilon >$, $\chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(N) \neq 0$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $v_\epsilon \in \chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(N)$ tal que $\|v_\epsilon\| = 1$ Por c3lculo funcional (Hecho 3.31,

$$\|N - \lambda I\|^2 = \langle (N - \lambda I)^*(N - \lambda I)\chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(N)(v_\epsilon) | v_\epsilon \rangle = \int_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)} |z - \lambda|^2 d(E(\lambda)) \leq \epsilon^2,$$

y se concluye que $N(v_\epsilon) - \lambda v_\epsilon \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. De (3.1) se obtiene:

$$v_\epsilon = T(Nv_\epsilon - \lambda v_\epsilon) \rightarrow 0 \text{ when } \epsilon \rightarrow 0.$$

Pero por otro lado se tiene que $\|v_\epsilon\| = 1$ para todo $\epsilon > 0$, lo cual es una contradicci3n.

□

Hecho 3.36 (Teorema 2.8.2 en [2]). Si K es un operador normal compacto, entonces $|\sigma(K)| \leq \aleph_0$ y consiste en valores espectrales puntuales con valores propios de dimensi3n finita y posiblemente un punto de acumulaci3n en $\lambda = 0$.

Definici3n 3.37. El *espectro escencial* $\sigma_e(T)$ de un operador lineal T es el espectro de la clase de equivalencia \tilde{T} de T en $\mathcal{C}(\mathcal{H})$.

Lema 3.38 (Criterio de Weyl para el espectro escencial). *Sea N un operador normal. Entonces, para toda $\lambda \in \mathbb{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

I $\lambda \in \sigma_e(N)$

II For all $\epsilon >$, $\dim(\chi_V(N)H) = \infty$

Demostración (i) \Rightarrow (ii) Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que $\chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(N)$ tiene dimensión finita. Sea

$$f(z) = \frac{1 - \chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(z)}{z - \lambda}.$$

Por el Hecho 3.21 (cálculo funcional), se tiene que,

$$f(N)(N - \lambda I) = (N - \lambda I)f(N) = I - \chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(N),$$

Puesto que $\chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(N)$ tiene dimension finita, $N - \lambda I$ es invertible modulo operadores compactos, y por lo tanto $\lambda \notin \sigma_e(N)$

(ii) \Leftarrow (i) Supongamos que $\lambda \notin \sigma(N)$. Entonces $N - \lambda I$ es invertible modulo operadores compactos. Sea T una inversa para $N - \lambda I$ en $B(H)/\mathcal{K}(H)$. Entonces

$$T(N - \lambda I) = I + K. \quad (3.2)$$

Por Hipótesis, para todo $\epsilon >$, $\chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(N)$ tiene dimension infinita y contiene $\ker(N - \lambda I)$ el cual tiene diemnsion finita puesto que $\lambda \notin \sigma_e(N)$. Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $v_\epsilon \in \chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(N)$ tal que $\|v_\epsilon\| = 1$ y $d(v_\epsilon, \ker(N - \lambda I)) = 1$ Por cálculo funcional (Hecho 3.31,

$$\|N - \lambda I\|^2 = \langle (N - \lambda I)^*(N - \lambda I)\chi_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}(N)(v_\epsilon) | v_\epsilon \rangle = \int_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)} |z - \lambda|^2 d(E(\lambda)) \leq \epsilon^2,$$

y de aqui $N(v_\epsilon) - \lambda v_\epsilon \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. De (3.2) se obtiene:

$$v_\epsilon + kv_\epsilon = T(Nv_\epsilon - \lambda v_\epsilon) \rightarrow 0 \text{ when } \epsilon \rightarrow 0.$$

Por compacidad de k , existe una sucesión $(v_n) \subseteq (v_\epsilon)$ tal que $kv_n \rightarrow v$ cuando $n \rightarrow \infty$ para algún $v \in H$. Esto implica que $v_n \rightarrow -v$ y, dado que $\|v_n\| = 1$, se obtiene que $\|v\| = 1$. Puesto que $N(v_n) - \lambda v_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que $Nv = \lambda v$, y por lo tanto:

$$\|v_n - v\| \geq d(v_n, \ker(N - \lambda I)) = 1,$$

lo que es una contradicción. □

Teorema 3.39 (Lema de Schur). *Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y T un operador normal en \mathcal{H} que conmuta con todo operador unitario U definido en \mathcal{H} . Entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T = \lambda I$ donde I es la identidad en \mathcal{H} .*

Demostración. Sea A el grupo de todos los operadores unitarios en \mathcal{H} y sea T un operador normal que conmuta con todo elemento de A . Sea $\lambda \in \sigma(T)$.

Caso 1, $\lambda \in \sigma_p(T)$ En este caso $T - \lambda I$ no es inyectiva así que, $\mathcal{H}_\lambda \neq \emptyset$. Pero \mathcal{H}_λ es un submódulo de \mathcal{H} para A y por el Teorema 3.15, $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}$. Esto implica que $T - \lambda I \equiv 0$ en \mathcal{H} , y entonces $T = \lambda I$.

Caso 2, $\lambda \in \sigma_c(T)$ Sea $\epsilon > 0$. Por el Lema 3.35 $P_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}\mathcal{H} \neq 0$. Pero $P_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}\mathcal{H}$ es un submódulo de \mathcal{H} para A , así que por la irreducibilidad de \mathcal{H} , $P_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}\mathcal{H} = \mathcal{H}$. Entonces $\mathcal{H}_\lambda = \bigcap_\epsilon P_{\bar{D}(\lambda, \epsilon)}\mathcal{H} = \mathcal{H}$, y $T = \lambda I$ en \mathcal{H} .

Caso 3, $\lambda \in \sigma_r(T)$ En este caso $\overline{Im(T - \lambda I)} \neq \mathcal{H}$. Pero $\overline{Im(T - \lambda I)} \neq \mathcal{H}$ es un submódulo de \mathcal{H} para A . Por el Teorema 3.15, \mathcal{H} es irreducible y $\overline{Im(T - \lambda I)} = 0$, y por lo tanto $T = \lambda I$ on \mathcal{H} .

□

Definición 3.40. Dos operadores A y B se dicen *aproximadamente unitariamente equivalentes* ($A \sim_a B$) si existe una sucesión de operadores unitarios ($U_n : n \in \omega$) tales que $B = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n A U_n^*$.

Teorema 3.41. Sean A y B normales operadores en espacios Hilbert separables. Entonces, A y B son aproximadamente unitariamente equivalentes si y solo si:

1. $\sigma_e(A) = \sigma_e(B)$.
2. $\dim\{x \in H : Ax = \lambda x\} = \dim\{x \in H : Bx = \lambda x\}$ para $\lambda \in S^1 \setminus \sigma_e(A)$.

Capítulo 4

Definibilidad

Lema 4.1. *El operador N^* es definible en $\langle \mathcal{H}, 0, +, \langle | \rangle, N \rangle$.*

Demostración. Sea $P(x, y) = \sup_z |\langle Nz|x \rangle - \langle z|y \rangle|$. Se tiene que $\|N^*x - y\|^2 = |\langle N^*x - y|N^*x - y \rangle| \leq \sup_z |\langle z|N^*x - y \rangle| = \sup_z |\langle z|N^*x \rangle - \langle z|y \rangle| = P(x, y)$. Por la Proposición 9.19 en y la Definición 9.22 en [5], N^* es definible \square

Teorema 4.2. *Sea $f \in \mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C})$. Entonces $f(N)$ es definible si y sólo si $f \in \mathcal{C}(\sigma(N), \mathbb{C})$.*

Demostración. \Rightarrow) Sea $f \in \mathcal{C}(\sigma(N), \mathbb{C})$. Por el Teorema de Stone-Wierstrass, f se puede aproximar de forma uniforme por una sucesión de polinomios en z y \bar{z} sobre $\sigma(N)$. Estos polinomios se traducen en polinomios en N y N^* . Por el Lema 4.1, dichos polinomios son definibles, así que $f(N)$ es definible.

\Leftarrow) Sea $f \in \mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C}) \setminus \mathcal{C}(\sigma(N), \mathbb{C})$ tal que $f(N)$ es definible. Sea λ_0 un punto de discontinuidad. Sea $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\sigma(N)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda_0$ pero $f(\lambda_k) \not\rightarrow f(\lambda_0)$. Existen modelos \mathcal{H}_k y $v_k \in \mathcal{H}_k$ tales que $\mathcal{H}_k \models Nv_k - \lambda_k v_k = 0$. Sea \mathcal{U} un ultrafiltro sobre \mathbb{N} tal que $\lim_{\mathcal{U}} f(\lambda_k) \neq f(\lambda_0)$. Sea $\mathcal{H} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{H}_k$ y sea $v = (v_k)_{\mathcal{U}} \in \mathcal{H}$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} f(\lambda_0)v &= f(N)(v) = f(N)(v_k)_{\mathcal{U}} = (f(N)v_k)_{\mathcal{U}} = \\ &= (f(\lambda_k)v_k)_{\mathcal{U}} = (\lim_{\mathcal{U}} f(\lambda_k))(v_k)_{\mathcal{U}} = (\lim_{\mathcal{U}} f(\lambda_k))v \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(\lambda_0) = \lim_{\mathcal{U}} f(\lambda_k)$, lo cual es una contradicción. \square

Proposición 4.3. *Un automorfismo U de $\langle \mathcal{H}, N \rangle$ es un operador unitario de \mathcal{H} tal que $UN = NU$*

Demostración. Es claro que U debe ser un operador lineal. También se tiene que para toda $u, v \in \mathcal{H}$, $U(Nv) = N(Uv)$ y $\langle Uu|Uv \rangle = \langle u|v \rangle$ por la definición de automorfismo. Por lo tanto U debe ser unitario. \square

Anotación 4.4. Si T es un operador definible en $\langle \mathcal{H}, N \rangle$ y U es un automorfismo de $\langle \mathcal{H}, N \rangle$, entonces $TU = UT$ por definibilidad.

Lema 4.5. *Sea $\langle \mathcal{H}', N' \rangle$ un extensión elemental de $\langle \mathcal{H}, N \rangle$ tal que toda $\lambda \in \sigma(N)$ es un valor propio, y sea T un operador definible en $\langle \mathcal{H}, N \rangle$. Entonces $T \upharpoonright \mathcal{H}'_\lambda = \alpha_\lambda Id_{\mathcal{H}'_\lambda}$ para algún $\alpha_\lambda \in \mathbb{C}$.*

Demostración. Si T es definible, por la Nota 4.4, T conmuta con todo automorfismo de \mathcal{H}' . De otro lado, se tiene que $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'_\lambda \oplus \mathcal{H}'_\lambda^\perp$. Entonces para todo automorfismo $U \in \text{Aut}(\mathcal{H}'_\lambda)$ es posible construir $\tilde{U} = U \oplus Id_{\mathcal{H}'_\lambda^\perp} \in \text{Aut}(\mathcal{H}')$. Como T conmuta con cualquier automorfismo de \mathcal{H}' , T conmuta con \tilde{U} y, por la definición de \tilde{U} , $T \upharpoonright \mathcal{H}'_\lambda$ conmuta con U . Dado que U es arbitrario, $T \upharpoonright \mathcal{H}'_\lambda$ conmuta con todo automorfismo de \mathcal{H}'_λ . Por el Lema de Schur, existe un número complejo α_λ tal que $T \upharpoonright \mathcal{H}'_\lambda = \alpha_\lambda Id_{\mathcal{H}'_\lambda}$ \square

Teorema 4.6. *Los operadores definibles en la estructura $\langle \mathcal{H}, N \rangle$ son exactamente aquellos en el álgebra C^* generada por N .*

Demostración. Por el Lema anterior, dado $\lambda \in \sigma(N)$, existe $\alpha_\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T \upharpoonright \mathcal{H}'_\lambda = \alpha_\lambda Id_{\mathcal{H}'_\lambda}$. Sea $f : \sigma(N) \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $f(\lambda) = \alpha_\lambda$. Por la parte \Leftarrow de la demostración del Teorema 4.2 f debe ser continua, y por el isomorfismo entre $C(\sigma(N), \mathbb{C})$ y el álgebra C^* generada por N , T debe pertenecer a dicha álgebra C^* . \square

Teorema 4.7. *Sea $f \in \mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C})$ y $(g_k) \subseteq \mathcal{C}(\sigma(N), \mathbb{C})$ como en el corolario anterior. Sea $v \in \mathcal{H}$. Entonces $g_k(N)(v) \rightarrow f(N)(v)$ cuando $k \rightarrow \infty$.*

Demostración. Se tiene que $f(N)(v) = \int_{\lambda \in \sigma(N)} f(\lambda) dE_\lambda(v)$ dado $\epsilon > 0$, existe N tal que para toda $k > N$, $\mu(\{\lambda \in \sigma(N) \mid f(\lambda) \neq g_k(\lambda)\}) < \epsilon$. Sea M una cota común para f y los g_k , $\sigma_k = \{\lambda \in \sigma(N) \mid f(\lambda) \neq g_k(\lambda)\}$ entonces, para $k > N$

$$\begin{aligned}
\|f(N)(v) - g_k(N)(v)\|^2 &= \\
&= \langle (f(N) - g_k(N))(v) \mid (f(N) - g_k(N))(v) \rangle \\
&= \langle (f(N) - g_k(N))^*(f(N) - g_k(N))(v) \mid v \rangle \\
&= \langle (\bar{f}(N) - \bar{g}_k(N))(f(N) - g_k(N))(v) \mid v \rangle \\
&\leq \| |f - g_k|^2(N)(v) \| \|v\| \\
&\leq \left\| \int_{\sigma_k} |f(\lambda) - g_k(\lambda)|^2 dE_\lambda(v) \right\| \\
&\leq 4M^2 \|E_{\sigma_k}(v)\|,
\end{aligned}$$

y por hipótesis $\|E_{\sigma_k}(v)\| \rightarrow 0$ \square

Corolario 4.8. *Sea $v \in \mathcal{H}$ y sea $f \in \mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C})$. Entonces $f(N)v \in \text{dcl}(v)$*

Demostración. Por el teorema anterior. \square

Definición 4.9. Sea $A \subseteq \mathcal{H}$. $\langle A \rangle$ denota el subespacio de Hilbert (no necesariamente cerrado) generado por A . También $\overline{\langle A \rangle}$ denota el subespacio de Hilbert generado por A .

Definición 4.10. Dado $v \in \mathcal{H}$, sea \mathcal{H}_v el subespacio de Hilbert generado por $f(N)(v)$ con $f \in \mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C})$.

Teorema 4.11. Sea $v \in \mathcal{H}$. Entonces $tp(v/\emptyset)$ está determinado por el conjunto de condiciones:

$$\{\|\tau(x)\| = \|\tau(v)\| \mid \tau(x) \text{ es un } L\text{-término en } x\}$$

Demostración. Es claro que $\{\|\tau(x)\| = \|\tau(v)\| \mid \tau(x) \text{ es un } L\text{-término en } x\} \subseteq tp(v/\emptyset)$. Sea \mathcal{M} el modelo monstruo y supongase que para algún $u, v \in \mathcal{H} \prec \mathcal{M}$ se tiene que

$$\{\|\tau(x)\| = \|\tau(u)\| \mid \tau(x) \text{ es un } L\text{-término en } x\} = \{\|\tau(x)\| = \|\tau(v)\| \mid \tau(x) \text{ es un } L\text{-término en } x\}$$

Entonces, $\mathcal{H}_u \simeq \mathcal{H}_v$ y por lo tanto, $\overline{\mathcal{H}_u} \simeq \overline{\mathcal{H}_v}$, donde $\overline{\mathcal{H}_u}$ es la clausura topológica de \mathcal{H}_u en \mathcal{M} . Sean \mathcal{H}_u^\perp y \mathcal{H}_v^\perp los complementos ortogonales de \mathcal{H}_u y \mathcal{H}_v respectivamente en \mathcal{M} . Entonces también se tiene $\mathcal{H}_u^\perp \simeq \mathcal{H}_v^\perp$ y así se obtiene un automorfismo de \mathcal{M} que envía u a v . \square

Teorema 4.12. Sea $v, w \in \mathcal{H}$. Entonces $tp(v/\emptyset) = tp(w/\emptyset)$ si y sólo si $\|f(N)v\| = \|f(N)w\|$ para toda función boreliana $f : \sigma(N) \rightarrow \mathbb{C}$.

Demostración. Por el Teorema 4.6 todo término $\tau(x)$ en L se puede describir como $f(N)x$ para alguna función continua f en σ , y por el Teorema 4.11 las normas de estos términos calculadas en v determinan al tipo $tp(v/\emptyset)$. Recíprocamente, cualquier $f(N)x$ con f una función boreliana, es un límite de términos $\tau(x)$ en L y $tp(v/\emptyset)$ determina los valores $\|f(N)v\|$. \square

Teorema 4.13. Sea $v, w \in \mathcal{H}$. Entonces $tp(v/\emptyset) = tp(w/\emptyset)$ si y sólo si $\|\chi_V(N)v\| = \|\chi_V(N)w\|$ para todo abierto $V \subseteq \sigma(N)$.

Demostración. Para toda función borel en σ y toda $\epsilon > 0$ existe un combinación lineal finita g de funciones características de subconjuntos abiertos mutuamente disyuntos de $\sigma(N)$ tal que $\|f - g\| < \epsilon$. Si $\|\chi_V(N)v\| = \|\chi_V(N)w\|$ para todo abierto $V \subseteq \sigma(N)$, entonces $\|g(N)v\| = \|g(N)w\|$. Dado que esto es verdad para toda $\epsilon > 0$ y si $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ entonces $\text{Im}\chi_{V_1} \perp \text{Im}\chi_{V_2}$ y entonces $\|f(N)v\| = \|f(N)w\|$. Como esto es verdad para toda función borel f de $\sigma(N)$, entonces $tp(v/\emptyset) = tp(w/\emptyset)$. El recíproco es inmediato. \square

Corolario 4.14. Sean $v, w \in \mathcal{H}$. Entonces $tp(v/\emptyset) = tp(w/\emptyset)$ si y sólo si $\mu_v = \mu_w$.

Definición 4.15. Dado $A \subseteq \mathcal{H}$, sea \mathcal{H}_A el subespacio de Hilbert cerrado de \mathcal{H} generado por los elementos $f(N)(a)$, donde $a \in A$ y $f \in \mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C})$. Bajo las mismas hipótesis, sea $\overline{\mathcal{H}}_A^\perp$ el complemento ortogonal de $\overline{\mathcal{H}}_A$ y P_A y P_{A^\perp} , las proyecciones sobre $\overline{\mathcal{H}}_A$ y $\overline{\mathcal{H}}_A^\perp$ respectivamente.

Lema 4.16. Sea $v \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq \mathcal{H}$. si $v \perp \mathcal{H}_A$ entonces $\mathcal{H}_v \perp \mathcal{H}_A$.

Demostración. Sea $f, g \in \mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C})$ y sea $a \in A$. Entonces

$$\langle f(N)(v) \mid g(N)a \rangle = \langle v \mid \bar{f}(N)g(N)(a) \rangle = \langle \bar{f}g(N)(v) \mid a \rangle = 0$$

.

□

Teorema 4.17. Sea $v \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq \mathcal{H}$. Entonces

$$tp(v/A) = tp(P_{A^\perp}(v)/\emptyset) \cup (x - P_A(v)) \perp \mathcal{H}_A,$$

donde $(x - P_A(v)) \perp \mathcal{H}_A$ es el conjunto de condiciones $\{|\langle x \mid a \rangle - \langle P_A(u) \mid a \rangle| = 0 \mid a \in \mathcal{H}_A\}$

Demostración. Sea $u, v \in \mathcal{H}$ son tal que

$$tp(P_{A^\perp}(u)/\emptyset) \cup (x - P_A(u)) \perp \mathcal{H}_A = tp(P_{A^\perp}(v)/\emptyset) \cup (x - P_A(v)) \perp \mathcal{H}_A$$

Entonces $P_A(u) = P_A(v)$ y existe un automorfismo del modelo monstruo que envía $P_{A^\perp}(u)$ a $P_{A^\perp}(v)$ y sea g dicho automorfismo. Por el Lema anterior, se tiene que $g(\mathcal{H}_{P_{A^\perp}(u)}) = \mathcal{H}_{P_{A^\perp}(v)}$. Así tomando una base apropiada para \mathcal{M} , se puede construir un automorfismo g' del modelo monstruo tal que $g' \upharpoonright \mathcal{H}_A = \text{id}$ y $g' \upharpoonright \mathcal{H}_A^\perp = g \upharpoonright \mathcal{H}_A^\perp$ □

Corolario 4.18. Sea $p, q \in S(A)$ y sea $u, v \in \mathcal{H}$ tal que $u \models p$ y $v \models q$. Entonces, $d(p, q) = \|P_A(u) - P_A(v)\|$

Demostración.

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \\ &= \inf_{a \models p, b \models q} \|P_A(a) + P_A^\perp(a) - (P_A(b) + P_A^\perp(b))\| = \\ &= \inf_{a \models p, b \models q} \|P_A(u) - P_A(v) + (P_A^\perp(a) - P_A^\perp(b))\| = \\ &= \inf_{a \models p, b \models q} \sqrt{[P_A(u) - P_A(v)]^2 + [(P_A^\perp(a) - P_A^\perp(b))]^2} \\ &= \sqrt{[P_A(u) - P_A(v)]^2 + (\|P_A^\perp(a)\| - \|P_A^\perp(b)\|)^2} \end{aligned}$$

□

Anotación 4.19. Si X es un espacio topológico, $|X|$ denota su *densidad*, es decir, el menor cardinal de un conjunto denso en X . Si A es un conjunto pero no es un espacio topológico, $|A|$ denota su cardinalidad.

Corolario 4.20. Sea $A \subseteq \mathcal{H}$ entonces $|S_1(A)| \leq |A| \times 2^{\aleph_0}$

Demostración. Inmediato a partir de los Teoremas 4.11, 4.17 y el Corolario 4.18. \square

Corolario 4.21. Sea $A \subseteq \mathcal{H}$. Entonces $U \in \text{Aut}(\mathcal{H}/A)$ si y sólo si U mantiene \mathcal{H}_A estable.

Corolario 4.22. Sea $A \subseteq \mathcal{H}$. Entonces $\text{dcl}(A) = \overline{\mathcal{H}_A}$

Demostración. Del Corolario 4.8 es claro que $\mathcal{H}_A \subseteq \text{dcl}(A)$. Para obtener el recíproco, sea $v \notin \overline{\mathcal{H}_A}$. Entonces $P_{A^\perp}(v) \neq 0$. Sea $u \in \mathcal{H}$ tal que $u \neq P_{A^\perp}(v)$, $u \perp \mathcal{H}_A$ y $\|u\| = \|P_{A^\perp}(v)\|$. Entonces por el Lema 4.16, $\mathcal{H}_u \perp \mathcal{H}_A$ y por el Teorema 4.17 $\text{tp}(P_A(v) + u/A) = \text{tp}(v/A)$. Pero existen varios $u \in \mathcal{H}$ que satisfacen lo anterior, así que $v \notin \text{dcl}(A)$. \square

Conjetura 4.23. Sea $v \in \mathcal{H}$. Entonces

$$\text{dcl}(v) = \{Av \mid \text{un pertenece al álgebra de von neuman generada por } N\}$$

Lema 4.24. Sea $v \in \mathcal{H}$. Si v es un vector propio correspondiente a algún $\lambda \in \sigma_d(N)$, entonces v es algebraico sobre \emptyset .

Demostración. $\lambda \in \sigma_d(N)$ si y sólo si λ es aislado en $\sigma(N)$ con espacio propio finite dimensional \mathcal{H}_λ . así que cualquier automorfismo puede enviar solamente \mathcal{H}_λ onto \mathcal{H}_λ y la órbita de v bajo dicho automorfismo solamente puede ser compacta. \square

Lema 4.25. Sea $v \in \mathcal{H}$ be tal que $v = \sum v_k$ donde cada v_k es un vector propio para algún $\lambda_k \in \sigma_d(N)$. Entonces v es algebraico sobre \emptyset .

Demostración. Dado que $\|v_k\| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, la órbita de v bajo todos los automorfismos es un cubo de Hilbert el cual es compacto. \square

Teorema 4.26. Sea $v \in \mathcal{H}$. Entonces v es algebraico sobre \emptyset si y sólo si para toda $w \in \mathcal{H}$ entonces $\mu_{v,w}(\sigma_e(N)) = 0$.

Demostración. \Rightarrow Suponga que $\mu_{v,w}(\sigma_e(N)) \neq 0$ para algún w . Por el Lema 3.38, para todo subconjunto abierto V de $\sigma(N)$ se tiene que $\dim(\chi_V(N)\mathcal{H}) = \infty$. Dado que $\lambda \in \sigma_d(N)$ si y sólo si λ es aislado en $\sigma(N)$ con espacio propio de dimensión finita \mathcal{H}_λ , para toda V subconjunto abierto de $\sigma_e(N)$, $\dim(\chi_V(N)\mathcal{H}) = \infty$. Para toda V subconjunto abierto de $\sigma_e(N)$, $\dim(\chi_V(N)\mathcal{H}) = \infty$ sea v_V^k una sucesión de elementos mutuamente ortogonales en $\dim(\chi_V(N)\mathcal{H})$ tal que para todo k , $\|v_V^k\| = \|\chi_V(N)v\|$. Sea $I = \{i \mid i \text{ es una colección finita de subconjuntos de borel disyuntos } \sigma(N)\}$. Para $i \in I$, sea $w_i^k = \sum_{V \in i} v_{V \cap \sigma_e(N)}^k + \chi_{V \cup \sigma_d(N)} v$. Sea \mathcal{U} un ultrafiltro en I . Sea $\mathcal{H}' = \prod_{I, \mathcal{U}} \mathcal{H}$ Sea $\bar{w}^k = (w_i^k)_{I, \mathcal{U}} \in \mathcal{H}'$. Entonces para todo k , \bar{w}^k tiene el mismo tipo de v sobre \emptyset así que la órbita de v es de dimensión infinita y v no es algebraico sobre \emptyset .

\Leftarrow Decir que $\mu_{v,w}(\sigma_e(N)) = 0$ es equivalente a decir que $v = \sum v_n$ con v_n vectores propios para $\lambda_n \in \sigma_d(N)$ y por el Lema 4.25

□

Teorema 4.27. *Sea $A \subseteq \mathcal{H}$. Entonces $acl(A)$ es cerrado subespacio de Hilbert generado por the union de $dcl(A)$ con $acl(\emptyset)$.*

Demostración. Sea E be the space $acl(\emptyset) + dcl(A)$. se tiene que $acl(\emptyset) \subseteq acl(A)$ y $dcl(A) \subseteq acl(A)$ así que $E \subseteq acl(A)$. Si $v \notin E$, sea $P_E v$ la proyección de v en E . se tiene que $w - P_E w \neq 0$ para algún subconjunto borel V de $\sigma(N)$, $\chi_V v - \chi_V P_E v \neq 0$. Se puede asumir que V es un subconjunto abierto de $\sigma_e(N)$, así que por el Lema 3.38 se puede encontrar un automorfismo que envía v en una orbita no compacta en \mathcal{H} , así que $v \notin acl(A)$. □

Capítulo 5

La teoría de $\langle \mathcal{H}, N \rangle$

Recordemos el Corolario II.4.2 form [10]:

Teorema 5.1 (Weyl-von Neuman-Berg). *Toda operador normal N en un espacio de Hilbert separable se puede expresar como la suma $N = D + K$ de un operador normal diagonal D y un operador compacto K . Más aún, para todo $\epsilon > 0$ operadores Hermitian A_1, \dots, A_n que conmutan, existen operadores Hermitian simultaneamente diagonalizables D_i y operadores compactos K_i tales que $A_i = D_i + K_i$ y $\|K_i\| < \epsilon$*

También, se necesita el Teorema II.4.4 de [10]

Teorema 5.2. $\lambda \in \sigma_e(N)$ si y sólo si para toda $n \in \mathbb{N}$ y para todo V conjunto abierto tal que $\lambda \in V$.

$$\mathcal{H} \models \inf_{u_1 u_2 \dots u_n} \max(|\langle u_i | u_j \rangle|, \|u_i\| - 1, |\chi_V(N)(u_i) - \lambda u_i|) = 0$$

Demostración. Este esquema de afirmaciones es claramente equivalente a la Proposición ?? y por el Corolario 4.8, estas afirmaciones son correctas en el lenguaje de lógica continua para estructura métricas. \square

El siguiente Lema es una ligera adaptación del Lema 3.6 en [3]

Lema 5.3. *Sea $\lambda \in \sigma(N)$ aislado, sea $\chi = d(\lambda, \sigma \setminus \{\lambda\})$ y sea $u \in \mathcal{H}$. Si $\|Nv - \lambda v\| < \epsilon$ entonces $\|v - P_\lambda(v)\| < \frac{\epsilon}{\chi}$.*

Demostración. Sea $\lambda' \in \sigma$ aislado y sea $u \in \mathcal{H}$. Entonces

$$\|Nv - \lambda'v\|^2 = \left\langle \int_{\lambda \in \sigma \setminus \{\lambda'\}} |\lambda - \lambda'|^2 dE_\lambda(v) \mid v \right\rangle$$

se tiene que $|\lambda - \lambda'|^2 \geq \chi^2$ para todo $\lambda \in \sigma$ tal que $\lambda \neq \lambda'$. Si $\|N(u) - \lambda'u\|^2 < \epsilon^2$,

$$\chi^2 \|v - P_\lambda(v)\|^2 = \chi^2 \left\langle \int_{\lambda \in \sigma \setminus \{\lambda'\}} dE_\lambda(v) \mid v \right\rangle \leq \left\langle \int_{\lambda \in \sigma \setminus \{\lambda'\}} |\lambda - \lambda'|^2 dE_\lambda(v) \mid v \right\rangle < \epsilon^2$$

así que $\|u - P_{\lambda'}(u)\|^2 < \frac{\epsilon^2}{\chi^2}$. \square

Lema 5.4. Si λ es un número complejo, $\lambda \in \sigma_d(N)$ si y solamente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $\epsilon > 0$, la siguiente afirmación es válida en $\langle \mathcal{H}, N \rangle$:

$$\inf_{u_1 u_2 \dots u_n} \sup_v \max(|\langle u_i | u_j \rangle|, \|u_i\| - 1, |Nu_i - \lambda u_i|, \epsilon \cdot \|N(v) - \lambda v\|, \|v - \sum_{k=1}^m \langle v | u_i \rangle u_i\| \cdot \frac{\epsilon}{\chi}) = 0$$

Demostración. Por el Lema 5.3 esta afirmación dice que el espacio propio correspondiente a λ es finito dimensional. \square

Lema 5.5. Si λ es un complejo, $\lambda \notin \sigma(N)$ si y solamente si, la siguiente condición es válida en $\langle \mathcal{H}, N \rangle$:

$$\sup_v (\eta \|v\| - \|Nv - \lambda v\|) = 0$$

donde $\eta = d(\lambda, \sigma(N))$

Demostración. Esta condición dice que $|Nv - \lambda v| \leq \eta \|v\|$ y por lo tanto es invertible para todo $v \in \mathcal{H}$. \square

El siguiente teorema es una nota de C.W. Henson:

Teorema 5.6. (Henson) Sean N_A y N_B dos operadores normales en el espacio de Hilbert separable \mathcal{H} . Entonces, las estructuras $\langle \mathcal{H}, N_A \rangle$ y $\langle \mathcal{H}, N_B \rangle$ son elementalmente equivalentes si y sólo si

1. $\sigma_e(N_A) = \sigma_e(N_B)$.
2. $\dim\{x \in \mathcal{H} : N_A x = \lambda x\} = \dim\{x \in \mathcal{H} : N_B x = \lambda x\}$ para $\lambda \in S^1 \setminus \sigma_e(N_A)$.

Demostración. \Rightarrow Sea $\langle \mathcal{H}, N_A \rangle \equiv \langle \mathcal{H}, N_B \rangle$. Por el Corolario 5.2, si $\lambda \in \mathbb{C}$ $\lambda \in \sigma_e(N_A)$ si y sólo si $\lambda \in \sigma_e(N_B)$. La conclusión se sigue de los Lemas 5.4, 5.5 y 5.2

\Leftarrow Sea N_A y N_B son aproximadamente unitariamente equivalentes. Entonces, existe una sucesión de operadores unitarios U_n tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n N_A U_n^* = N_B$. Sea \mathcal{U} un ultrafiltro sobre \mathbb{N} que contiene al filtro de subconjuntos cofinitos de \mathbb{N} . Sea $\langle \mathcal{H}_1, N_1 \rangle = \prod_{\mathbb{N}} \langle \mathcal{H}, U_n N_A U_n^* \rangle$ y sea $\langle \mathcal{H}_2, N_2 \rangle = \prod_{\mathbb{N}} \langle \mathcal{H}, N_B \rangle$. Se sigue que $\mathcal{H}_1 \simeq \mathcal{H}_2$ y por Keisler-Shelah's teorema, $\langle \mathcal{H}, N_A \rangle \equiv \langle \mathcal{H}, N_B \rangle$. \square

Definición 5.7. Sea T_σ la teoría espacios de Hilbert junto con las siguientes condiciones:

1. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| + |\beta| \leq 1$:

$$\sup_u \sup_v |N(f_{\alpha, \beta}(u, v)) - f_{\alpha, \beta}(N\alpha, N\beta)| = 0$$

2. $\sup_v |NN^*v - N^*Nv| = 0$

3. Para $\lambda \in \sigma_e(N)$, $V \subseteq \mathbb{C}$ conjunto abierto tal que $\lambda \in V$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$\inf_{u_1 u_2 \dots u_n} \max(|\langle u_i | u_j \rangle|, \|u_i\| - 1, |\chi_V(N)(u_i) - \lambda u_i|) = 0$$

4. Para $\lambda \in \sigma_d(N)$ y $n_\lambda \in \mathbb{N}$ como en el Lema 5.4 y $\epsilon > 0$:

$$\inf_{u_1 u_2 \dots u_{n_\lambda}} \sup_v \max(|\langle u_i | u_j \rangle|, \|u_i\| - 1, |Nu_i - \lambda u_i|, \epsilon - \|N(v) - \lambda v\|, \|v - \sum_{k=1}^m \langle v | u_i \rangle u_i\| - \frac{\epsilon}{\chi}) = 0$$

5.

$$\sup_v (\eta \|v\| - \|Nv - \lambda v\|) = 0$$

Corolario 5.8. T_σ axiomatiza la teoría $Th \langle \mathcal{H}, N \rangle$.

Demostración. Por el Teorema 5.6. □

Corolario 5.9. La teoría de la estructura $\langle \mathcal{H}, N \rangle$ admite eliminación de cuantificadores.

Demostración. Los Teoremas 4.11 y 4.17 muestran que el tipo libre de cuantificadores de un elemento determina el tipo de dicho elemento. □

Capítulo 6

Estabilidad

Teorema 6.1. T_σ es κ -estable para $\kappa \geq |\sigma|$.

Demostración. Inmediato a partir del Corolario 4.20. \square

Definición 6.2. Sea $v \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq \mathcal{H}$. Entonces $P_{dcl(A)}(v)$ y $P_{acl(A)}(v)$ denotan la proyección de v sobre los espacios $dcl(A)$ y $acl(A)$ respectivamente. De la misma manera, $P_{dcl(A)^\perp}(v)$ y $P_{acl(A)^\perp}(v)$ denotan la proyección de v sobre los espacios $dcl(A)^\perp$ y $acl(A)^\perp$ respectivamente.

Definición 6.3. Sea $v \in \mathcal{H}$. Sean $A, B \subseteq \mathcal{H}$. Se dice que u es *independiente* de B sobre A si $P_{acl(A)}(v) = P_{acl(A \cup B)}(v)$, lo cual se denota $u \downarrow_A^* v$.

Teorema 6.4. Sea $v, w \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq \mathcal{H}$. Entonces $v \downarrow_A^* w$ si y sólo si para toda $f \in \mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C})$, $v - P_{acl(A)}v \perp f(N)w$.

Demostración. \Rightarrow) Sea $v \downarrow_A^* w$. Entonces $P_{acl(A)}(v) = P_{acl(A \cup \{w\})}(v)$. Así que $P_{acl(A)}(v) = P_{\langle acl(A) \cup \mathcal{H}_w \rangle}(v)$. Entonces $v - P_{acl(A)}(v) = v - P_{\langle acl(A) \cup \mathcal{H}_w \rangle}(v)$. Pero $v - P_{\langle acl(A) \cup \mathcal{H}_w \rangle}(v) \perp \mathcal{H}_w$. Entonces $v - P_{acl(A)}(v) \perp \mathcal{H}_w$ which implies que $v - P_{acl(A)}v \perp f(N)w$ para toda $f \in \mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C})$.

\Leftarrow) Las anteriores implicaciones son reversibles. \square

Lema 6.5. Sea $A \subseteq \mathcal{H}$ y V un subconjunto de borel de $\sigma(N)$. Entonces $\chi_V(N)$ conmuta con $P_{dcl(A)}$ y $P_{acl(A)}$.

Demostración. Sea $v \in \mathcal{H}$ y V un subconjunto de Borel de $\sigma(N)$. Se puede escribir $v = P_{acl(A)}v + P_{acl(A)^\perp}v$. Para todo $a \in acl(A)$, $\chi_V(N)a \in acl(A)$ y $\langle a | \chi_V(N)P_{acl(A)^\perp}v \rangle = \langle \chi_V(N)a | P_{acl(A)^\perp}v \rangle = 0$ ($\chi_V(N)$ es autoadjunto). Entonces $\chi_V(N)P_{acl(A)}v \in acl(A)$ y $\chi_V(N)P_{acl(A)^\perp}v \in acl(A)^\perp$. Por lo tanto $P_{acl(A)}\chi_V(N)v = P_{acl(A)}\chi_V(N)P_{acl(A)}v + P_{acl(A)}\chi_V(N)P_{acl(A)^\perp}v = \chi_V(N)P_{acl(A)}v$ y $P_{acl(A)}\chi_V(N)v = \chi_V(N)P_{acl(A)}v$. La demostración es similar para $P_{dcl(A)}$. \square

Teorema 6.6. *Sea $v, w \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq \mathcal{H}$. Entonces $v \downarrow_A^* w$ si y sólo si para todo subconjunto abierto V de $\sigma(N)$, $\chi_V(N)v \downarrow_A^* \chi_V(N)w$.*

Demostración. Sea $v, w \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq \mathcal{H}$. Por el Teorema 6.4, $v \downarrow_A^* w$ si y sólo si para toda $f \in \mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C})$, $v - P_{acl(A)}v \perp f(N)w$. Sea V un subconjunto de Borel de $\sigma(N)$. Por el Lema 6.5, si $v \downarrow_A^* w$ entonces $\chi_V(N)v - P_{acl(A)}\chi_V(N)v \perp f(N)\chi_V(N)w$ y $\chi_V(N)v \downarrow_A^* \chi_V(N)w$. El recíproco viene de tener en cuenta que $v = \chi_{\sigma(N)}(N)v$. \square

Corolario 6.7. *Sea $v, w \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq \mathcal{H}$. Entonces $v \downarrow_A^* w$ si y sólo si para todo subconjunto abierto V de $\sigma(N)$, $\chi_V(N)v - \chi_V(N)P_{acl(A)}v \perp \chi_V(N)w$.*

Demostración. Sea v, w y A como se describe mas arriba. Por los Teoremas 6.4 y 6.6 $v \downarrow_A^* w$ si y sólo si para todo subconjunto de Borel V de $\sigma(N)$, y toda $f \in \mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C})$, $\chi_V(N)v - P_{acl(A)}\chi_V(N)v \perp \chi_V(N)f(N)w$. Pero $f(N)$ se puede aproximar arbitrariamente por combinaciones lineales de funciones características de conjuntos de borel disyuntos en $\sigma(N)$. Pero $\chi_V(N)\chi_{V'}(N) = 0$ si V y V' son disyuntos, de lo cual se sigue la conclusión deseada. \square

Corolario 6.8. *Sea $v, w \in \mathcal{H}$ y $C \subseteq \mathcal{H}$. Entonces $v \downarrow_C^* w$ si y sólo si para todo subconjunto de Borel V de $\sigma(N)$, $\chi_V(N)P_{acl(C)}v \perp \chi_V(N)P_{acl(C)}w$.*

Demostración. Sea $v, w \in \mathcal{H}$ y $C \subseteq \mathcal{H}$ tal que $v \downarrow_C^* w$. Sea V un subconjunto de Borel de $\sigma(N)$ fijo. Por el Lema 6.7, $\chi_V(N)v - \chi_V(N)P_{acl(C)}v \perp \chi_V(N)w$. También, se tiene que $\chi_V(N)v = \chi_V(N)P_{acl(C)}v + \chi_V(N)P_{acl(C)}^\perp v$ y $\chi_V(N)w = \chi_V(N)P_{acl(C)}w + \chi_V(N)P_{acl(C)}^\perp w$. Por lo tanto la condición anterior significa que $\chi_V(N)P_{acl(C)}^\perp v \perp \chi_V(N)P_{acl(C)}w + \chi_V(N)P_{acl(C)}^\perp w$. Pero esto es lo mismo que decir que $\chi_V(N)P_{acl(C)}^\perp v \perp \chi_V(N)P_{acl(C)}^\perp w$. \square

Definición 6.9. Sea $A \subseteq B$, $p \in S(A)$ y $q \in S(B)$ tal que $p \subseteq q$. Se dice que q es una extensión *no bifurcante* de p si para toda $v \in \mathcal{H}$ si $\mathcal{H} \models q(v)$ entonces $v \downarrow_A^* B$.

Teorema 6.10. *Sea $A \subseteq B$, $p \in S(A)$ $q \in S(B)$ y $v, w \in \mathcal{H}$ tal que $p = tp(v/A)$ y $q = tp(w/B)$. Entonces q es una extensión no bifurcante de p si y sólo si*

1. $P_{acl(A)}v = P_{acl(A)}w$
2. Para toda subconjunto de Borel V de $\sigma(N)$, $\|P_{acl(A)}^\perp \chi_V(N)v\| = \|P_{acl(A)}^\perp \chi_V(N)w\|$
3. Para toda subconjunto de Borel V de $\sigma(N)$, $P_{acl(A)}^\perp \chi_V(N)w \perp acl(B)$.

Demostración. Por 4.17 las condiciones 1) y 2) son equivalentes a $tp(v/A) = tp(w/A)$. y por el Corolario 6.8, la condition 3) es equivalente a $w \downarrow_A^* B$. \square

Teorema 6.11. \downarrow^* es una relación de independencia.

Demostración. Caracter finito Se demuestra que para $v \in \mathcal{H}$, $A, B \subseteq \mathcal{H}$, $v \downarrow_A^* B$ si y sólo si $v \downarrow_A^* B_0$ para toda $B_0 \subseteq B$ finito. La dirección \Rightarrow es clara. Para la dirección \Leftarrow , supongamos que $v \not\downarrow_A^* B$. Sea $w = P_{acl(A \cup B)}(v) - P_{acl(A)}(v)$. Entonces $w \in acl(A \cup B) \setminus acl(A)$. Entonces existen w_1, w_2 tales que $w_1 \in dcl(A \cup B)$, $w_2 \in acl(\emptyset)$ y $w = w_1 + w_2$. Por el Teorema 4.22 existe una sucesión $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A \cup B$ y f_k $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=0}^n f_k(v_k) \rightarrow w_1$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea E el generado de $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Si $\dim(E) = \infty$ no hay nada que probar. Si no, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|w_1 - P_{dcl(A \cup \{v_1, \dots, v_N\})}(w_1)\| < \frac{\|w_1\|}{2}$ y al menos un $v_k \notin A$. Sea $B_0 = B \cap \{v_1, \dots, v_N\}$. Entonces $P_{A \cup B_0}(v) = P_{dcl(A \cup \{v_1, \dots, v_N\})}(w_1) + w_2$ y $v \not\downarrow_A^* B_0$

Caracter local Sea $v \in \mathcal{H}$ y $B \subseteq \mathcal{H}$. Sea $w = P_{acl(B)}(v)$. Entonces existe una sucesión $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B$ tal que $b_k \rightarrow w$ cuando $k \rightarrow \infty$. Sea $B_0 = \{b_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Entonces $v \downarrow_{B_0}^* B$ y $|B_0| = \aleph_0$

Transitividad de la independencia Sea $v \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq B \subseteq C \subseteq \mathcal{H}$. si $v \downarrow_A^* C$ entonces $P_{acl(A)}(v) = P_{acl(C)}(v)$. Es claro que $P_{acl(A)}(v) = P_{acl(B)}(v) = P_{acl(C)}(v)$, así que $v \downarrow_A^* B$ y $v \downarrow_B^* C$. Recíprocamente, si $v \downarrow_A^* B$ y $v \downarrow_B^* C$, se tiene que $P_{acl(A)}(v) = P_{acl(B)}(v)$ y $P_{acl(B)}(v) = P_{acl(C)}(v)$. Entonces $P_{acl(A)}(v) = P_{acl(C)}(v)$ y $v \downarrow_A^* C$.

Simetría Es claro a partir del Corolario 6.8.

Invariancia Sea U un automorfismo de $\langle \mathcal{H}, N \rangle$. Sea $v, w \in \mathcal{H}$ y $C \subseteq \mathcal{H}$ tal que $v \downarrow_C^* w$. Por el Corolario 6.8, la invariancia es equivalente a decir que para todo subconjunto de Borel V de $\sigma(N)$, $\chi_V(N)P_{acl(C)^\perp}v \perp \chi_V(N)P_{acl(C)^\perp}w$. Pero esto es verdad si y sólo si para todo subconjunto de Borel V de $\sigma(N)$, $\chi_V(N)P_{acl(UC)^\perp}Uv \perp \chi_V(N)P_{acl(UC)^\perp}Uw$ ya que U es un automorfismo. Entonces $v \downarrow_C^* w$ si y sólo si $Uv \downarrow_U C^*Uw$.

Existencia Sea $A \subseteq B$, $p \in S(A)$ y $v \in \mathcal{H}$ tal que $p = tp(v/A)$. Se tiene que para todo conjunto de borel V de $\sigma(N)$, sea a_V tal que $a_V \perp acl(B)$, $a_V \perp P_{acl(B)^\perp}\chi_V(N)v$ y $\|a_V\| = \|P_{acl(B)^\perp}\chi_V(N)v\|$. sea $b_V = a_V + P_{acl(A)}\chi_V(N)v$. Sea $I = \{i \mid i \text{ es una colección finita de subconjuntos de borel disjuntos de } \sigma(N)\}$. Para $i \in I$, sea $w_i = \sum_{V \in i} b_V$. Sea \mathcal{U} un ultrafiltro en I . Sea $\mathcal{H}' = \prod_{I, \mathcal{U}} \mathcal{H}$. Sea $\bar{w} = (w_i)_{I, \mathcal{U}} \in \mathcal{H}'$. Entonces $b\bar{w}$ satisface las hipótesis del Teorema 6.10 y $tp(\bar{w}/B)$ es una extensión no bifurcante de p .

Estacionaridad Es claro por el Teorema 6.10. □

Definición 6.12. Sea $v \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq \mathcal{H}$. Sea $Cb(v/A) = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en A tal que existe una sucesión $\{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{B}(\sigma(N), \mathbb{C})$ tal que $f_k(a_k) \rightarrow P_{dcl(A)}v$.

Teorema 6.13. Sea $v \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq \mathcal{H}$. Entonces $Cb(v/A)$ es una base canonica para el tipo $tp(v/A)$

Demostración. Clara a partir del Corolario 6.8. \square

Definición 6.14. Sea $A \subseteq H$ y $p, q \in S_n(A)$. Se dice que p es *casi ortogonal* q ($p \perp^a q$) si para todo $\bar{a} \models p$ and $\bar{b} \models q$ $\bar{a} \perp_A \bar{b}$.

Lema 6.15. Sea $A \subseteq H$ tal que $A = \text{acl}(A)$. Sean $p, q \in S_1(A)$, sean $a \models p$ y $b \models q$. Si $a = P_A(a) + a'$ y $b = P_A(b) + b'$, Sean

$$\sigma_p = \{\lambda \in \sigma(N) : \forall V \subseteq \sigma(N) \text{ open neighborhood of } \lambda, \chi_V(N)a' \neq 0 \in p\}$$

$$\sigma_q = \{\lambda \in \sigma(N) : \forall V \subseteq \sigma(N) \text{ open neighborhood of } \lambda, \chi_V(N)b' \neq 0 \in q\},$$

entonces, $p \perp^a q$ si y sólo si $\sigma_p \cap \sigma_q = \emptyset$.

Demostración. Inmediato a partir del Corolario 6.8. \square

Corolario 6.16. Sea $A \subseteq H$ tal que $A = \text{acl}(A)$. Sean $p, q \in S_1(A)$, y sean $a \models p$ y $b \models q$. Si $a = P_A(a) + a'$ y $b = P_A(b) + b'$, entonces $p \perp^a q$ si y sólo si $\mu_{a'} \perp \mu_{b'}$.

Bibliografía

- [1] N.I. Akhiezer, I.M. Glazman, *Theory de linear operators in Hilbert Space vols.I and II*. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.
- [2] W. Arveson, *A short course on spectral theory* Springer Verlag.
- [3] C. Argoty, A. Berenstein, *Hilbert spaces expanded with an unitary operator*
- [4] Itai Ben Yaacov, *On perturbations of continuous structures*, submitted.
- [5] Itai Ben Yaacov, Alexander Berenstein, C. Ward Henson and Alexander Usvyatsov, *Model theory for metric structures*, submitted.
- [6] Itai Ben Yaacov and Alexander Usvyatsov, *Continuous first order logic and local stability*. submitted.
- [7] Itai Ben Yaacov, Alexander Usvyatsov and Moshe Zadka, *Generic automorphism of a Hilbert space*, preprint.
- [8] Alexander Berenstein, and Steven Buechler, *Simple stable homogeneous expansions of Hilbert spaces*. Annals of of pure and Applied Logic. Vol. 128 (2004) pag 75-101.
- [9] Steven Buechler, *Essential stability theory*. Springer Verlag, 1991.
- [10] K. Davidson, *C*-algebras by example*. Fields institute monographs, American Mathematical Society, 1996.
- [11] R. Dautray, L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*, volume 3.
- [12] H. Hsu, *Fourier Analysis*, Schaum series, Mc Graw Hill, 1985.
- [13] José Iovino, *Stable theories in functional analysis* University of Illinois Ph.D. Thesis, 1994.
- [14] L. Liusternik and V. Sobolev, *Elements of Functional Analysis*. Frederic Ungar Publishing Co., New York, 1961
- [15] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics* volume I: *Functional analysis, revised and enlarged edition*. Academic Press, 1980.

[16] W. Rudin *real and complex analysis* McGraw Hill